

平成 30 年度（2018 年度）学位論文（修士）

距離関数を用いた 任意物体形状まわりの 対流熱伝達計算

提出日：平成 31 年（2019 年）1 月 25 日

首都大学東京大学院
システムデザイン研究科 システムデザイン専攻
航空宇宙システム工学域 博士前期課程

学修番号 17891522

氏名 中谷 優浩

指導教員 田川 俊夫 准教授

目次

第 1 章 緒言	p.1
1.1 はじめに	
1.2 格子の生成方法	
1.3 塗装用乾燥炉の解析	
1.4 本研究の目的	
 第 2 章 解析手法	 p.4
2.1 計算格子	
2.2 支配方程式	
2.3 無次元の支配方程式	
2.4 離散化スキーム	
2.5 距離関数	
2.6 IB 法	
2.6.1 滑りなし条件 (No-Slip Wall)	
2.6.2 滑り条件 (Slip Wall)	
2.7 壁面における温度境界条件	
2.7.1 等温加熱条件	
2.7.2 断熱条件	
2.7.3 物体内の熱伝導計算	
2.8 計算フロー	
 第 3 章 計算の妥当性検証	 p.14
3.1 平板境界層流れ (等温加熱条件)	
3.1.1 計算モデル	
3.1.2 計算結果	
3.2 対流熱伝達計算 (物体内の熱伝導計算)	
3.2.1 計算モデル	
3.2.2 計算結果	

第 4 章	乾燥炉解析への適用	p .23
4.1	計算モデル	
4.2	計算結果	
第 5 章	結言	p .30
付録		
付録 A	支配方程式の無次元化	p.31
付録 B	IP 点における値の補間	p.33
付録 C	境界条件の離散化	p.35
付録 D	Runge-Kutta 法を用いた Blasius 方程式の解法	p.37
付録 E	$\partial U_s / \partial N$ と Nu の求め方	p.40
付録 F	平板境界層計算の可視化結果	p.42
参考文献		p .48
謝辞		p .50

記号表

A	: IB 法の補間に用いる係数の分母	[－]
A_B, A_{IP1}, A_{IP2}	: IB 法の補間に用いる係数の分子	[－]
C_C	: 無次元比熱	[－]
C_G	: 気相の比熱	[J/(kg · K)]
C_p	: 定圧比熱	[J/(kg · K)]
C_S	: 物体の比熱	[J/(kg · K)]
\bar{C}	: 比熱比	[－]
C	: 比熱	[J/(kg · K)]
d	: 平行平板高さ	[m]
\vec{e}_N	: 無次元単位法線方向ベクトル	[－]
\vec{e}_S	: 無次元単位接線方向ベクトル	[－]
\vec{F}_{IB}	: IB 法による無次元外力項	[－]
He	: Heaviside 関数	[－]
h_s	: 局所熱伝達率	[W/(m ² · K)]
k_C	: 無次元熱伝導率	[－]
k_G	: 気相の熱伝導率	[W/(m · K)]
k_S	: 物体の熱伝導率	[W/(m · K)]
\bar{k}	: 熱伝導率比	[－]
k	: 熱伝導率	[W/(m · K)]
L_{slip}	: 滑り面長さ	[m]
L_x	: 計算領域の X 方向長さ	[m]
L_y	: 計算領域の Y 方向長さ	[m]
L	: 代表長さ	[m]
Nu	: 局所ヌセルト数	[－]
N_X	: \vec{e}_N の X 方向成分	[－]
N_Y	: \vec{e}_N の Y 方向成分	[－]
N	: 無次元法線方向座標	[－]

n	: 法線方向座標	[m]
Pr	: Prandtl 数	[−]
P	: 無次元圧力	[−]
p	: 圧力	[Pa]
Q_{IB}	: IB 法による無次元熱量	[−]
Re	: Reynolds 数	[−]
S_X	: \vec{e}_S の X 方向成分	[−]
S_Y	: \vec{e}_S の Y 方向成分	[−]
S	: 無次元接線方向座標	[−]
s	: 接線方向座標	[m]
t	: 時間	[s]
\vec{U}_B	: 物体壁面の無次元速度ベクトル	[−]
\vec{U}_{IB}	: IB 点における無次元速度ベクトル	[−]
U_{IB}	: \vec{U}_{IB} の X 方向成分	[−]
\vec{U}_{IP}	: IP 点における無次元速度ベクトル	[−]
U_{IP}	: \vec{U}_{IP} の X 方向成分	[−]
U_{in}	: 無次元流入速度	[−]
U_{NIB}	: \vec{U}_{IB} の法線方向成分	[−]
U_{NIP}	: \vec{U}_{IP} の法線方向成分	[−]
U_N	: 無次元法線方向速度	[−]
U_{SIB}	: \vec{U}_{IB} の接線方向成分	[−]
U_{SIP}	: \vec{U}_{IP} の接線方向成分	[−]
U_S	: 無次元接線方向速度	[−]
\vec{U}	: 無次元速度ベクトル	[−]
U	: 無次元 X 方向速度	[−]
u_{in}	: 流入速度	[m/s]
u_{move}	: 物体の移動速度	[m/s]
\vec{u}	: 速度ベクトル	[m/s]
u	: x 方向速度	[m/s]

V_{IB}	: \vec{U}_{IB} の Y 方向成分	[－]
V_{IP}	: \vec{U}_{IP} の Y 方向成分	[－]
V	: 無次元 Y 方向速度	[－]
v	: y 方向速度	[m/s]
ΔX	: 無次元 X 方向格子幅	[－]
\vec{X}	: 無次元座標ベクトル	[－]
X	: 無次元 X 方向座標	[－]
\vec{x}	: 座標ベクトル	[m]
x	: x 方向座標	[m]
ΔY	: 無次元 Y 方向格子幅	[－]
Y	: 無次元 Y 方向座標	[－]
y	: y 方向座標	[m]
α	: 熱拡散率	[m ² /s]
δ_{IP}	: IP 点までの距離	[－]
δ_{IP1}	: IP1 点までの距離	[－]
δ_{IP2}	: IP2 点までの距離	[－]
δ_{IB}	: 物体近傍範囲	[－]
δ	: 界面厚さ	[－]
ϕ_X	: 距離関数の X 方向勾配	[－]
ϕ_Y	: 距離関数の Y 方向勾配	[－]
ϕ	: 距離関数	[－]
ν	: 動粘度	[m ² /s]
θ_B	: 物体壁面の無次元温度	[－]
θ_{IB}	: IB 点における無次元温度	[－]
θ_{IP}	: IP 点における無次元温度	[－]
θ	: 無次元温度	[－]
θ_{hot}	: 最大温度	[K]
θ_{cold}	: 最小温度	[K]
θ	: 温度	[K]

ρ_C	: 無次元密度	[－]
ρ_G	: 気相の密度	[kg/m ²]
ρ_S	: 物体の密度	[kg/m ²]
$\bar{\rho}$: 密度比	[－]
ρ	: 密度	[kg/m ²]
$\Delta \tau$: 無次元時間刻み	[－]
τ	: 無次元時間	[－]
ψ	: 傾斜角度	[deg]

Notations

$\vec{\nabla}$: $\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$
∇	: $\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix}$
∇^2	: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ or $\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$

第 1 章

緒言

1.1 はじめに

CFD(Computational Fluid Dynamics)とはコンピュータによって流体に関する方程式を解き、解析する分野である。計算機の発達とともに発展し、現在は航空機、船舶、自動車などの機械設計や、血液の流れなどの解析といった生理学の解明、地球ダイナモや気象のシミュレーションといった地球科学の解明や予想など多種多様な分野で用いられている^[1]。

CFD は実験と比較すると設備投資のコストが低い、条件の変更が容易、実験での再現が困難な現象の解析が可能、目視できない流れの可視化が可能などの利点がある。しかし、数値解析によって求まる方程式の解は近似解であり、実際の現象を完全に再現することは困難である。したがって、CFD を利用する場合には誤差がどの程度発生するのかを把握して用いなければならない。

1.2 格子の生成方法

流体計算に用いられる格子は大きく分けて境界適合格子、非構造格子、デカルト座標格子の 3 種類に分類される。それぞれの特徴を Table1-1 に示す。デカルト座標格子は格子点あたりの計算時間およびメモリが最小、格子生成が容易、空間高次精度が容易などの利点を持つ。しかし、物体壁面が格子に沿っていない場合、物体形状の再現度を上げるために特別な取り扱いが必要になる。また、十分な精度を確保するためには物体近傍で格子を細かくする必要があり、必要なメモリが増加する。近年の計算機の発達によって、十分な格子数を確保しつつ、実用的な計算時間で計算することができるため、デカルト座標格子の利用が見直されつつあり、複雑形状を対象にした流体解析への使用が期待される。

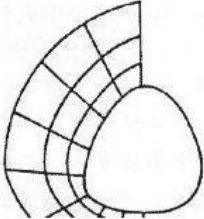
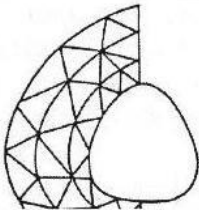
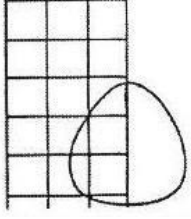
デカルト座標格子における物体境界の再現精度を上げる手法として IB 法 (Immersed Boundary Method) ^[2]がある。IB 法の優位性として以下の 4 点が挙げられる。

- ・ 格子生成にかかる手間が少ない
- ・ 物体形状が複雑化しても計算時間、計算負荷の変化が小さい
- ・ 移動物体境界問題への適応が比較的容易である
- ・ 高精度のスキームが利用できる

これらの利点から現在、盛んに研究が進められている。また、IB 法は格子と境界壁面のなす角度によって精度が変化するという問題がある^{[3][4]}。多くの IB 法による解法が提案されており、周囲の速度から補間して速度を与える手法^{[3][4][5][6][7]}、物体壁面付近で壁面の位置を

考慮して離散する手法^{[8][9][10][11]}などがある。また、物体を考慮して圧力修正の反復を行うことで精度を向上させる手法も開発されている^{[12][13]}。IB法を用いたモデルとして乱流解析など多くのモデルが検証されているが熱伝達を含むモデルは少なく、定量的に評価する必要がある。移動物体まわりの熱伝達を計算することができれば、自動車の塗装用乾燥炉の解析や食品加熱工程の解析といった加熱されながら物体が移動する生産ラインの最適化シミュレーションに応用することができ有益であるといえる。

Table1- 1 格子の種類^[14]

格子の種類	境界適合格子	非構造格子	デカルト座標格子
			
格子生成	<ul style="list-style-type: none"> ・簡単な形状は容易 ・3次元複雑形状には単一格子の形成が困難 	<ul style="list-style-type: none"> ・任意形状に対して自動形成可 ・解適合格子が容易 ・格子作成の計算量が大きい 	<ul style="list-style-type: none"> ・任意形状に対して自動形成可 ・解適合格子が容易
計算精度 及び 計算時間	<ul style="list-style-type: none"> ・高効率、高精度な解法 ・物体表面近くの精度が必要な問題に適している 	<ul style="list-style-type: none"> ・計算時間は境界適合格子と遜色ないレベルに達した ・メモリ要求が大きく、空間高次精度化も困難 	<ul style="list-style-type: none"> ・格子点当たりの計算時間およびメモリは最小 ・物体境界の精度が特別な扱いなしでは悪い

1.3 塗装用乾燥炉の解析

自動車の製造する際、車体を塗装液で満たされたプールに通し、車体表面をコーティングした後、左右から熱風を当てることで塗装液を乾燥させる処理がある。自動車製造において、乾燥工程におけるエネルギー消費は全体の中でも大きな割合を占めており、その削減は重要な課題である。Fig1-1に株式会社ディライトによって解析された例を示す^[15]。このとき車

体はレールに乗って乾燥炉内を等速で移動する．左右の側壁に熱風が出入りする流入口と抜ける流出口があり，徐々に車体が熱される．現在，塗装用乾燥炉の解析には非構造格子を用いることが多く，格子を形成するための計算負荷が大きく，メッシュを手直しする処理が必要になることも多い．また，流体計算は計算に時間を要するため，熱風の流入口からの距離や流入速度，流入角度などを用いて温度や熱伝達率をモデル化して解析されることもある^[16]．

IB 法を用いてデカルト座標格子で計算することで，格子生成にかかる手間を省くことができ，プリ処理の負担を軽減させることができる．しかし，デカルト座標格子では非構造格子を用いるより格子を細かくする必要がある．近年の計算機の発達によりデカルト座標格子を用いて格子を十分細かくすることができ，かつ実用的な計算時間で解析することができる．今後，更なる計算機の発達によって移動物体の解析はデカルト座標格子が主流になることが考えられる．

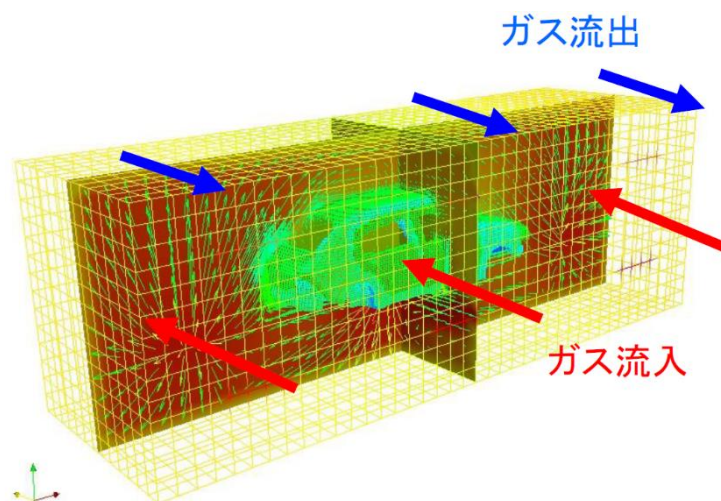


Fig. 1-1 塗装用乾燥炉の解析例¹

1.4 本研究の目的

デカルト座標格子を用いて任意物体形状まわりの流れを精度良く計算するために，IB 法を応用し，距離関数を用いて壁面温度境界条件を与える手法の導入とその手法の妥当性の検証を本研究の目的とする．ここでは物体内部を等温とし，壁面で等温加熱条件を与えた計算と物体内部の熱伝導を考慮し，対流の影響によって壁面で熱流束が異なる計算を行った．4 章では応用例として乾燥炉を模擬した計算を行った．

第2章

解析手法

2.1 計算格子

本研究ではデカルト格子を用い，空間の離散化は Fig.2-1 に示すような等間隔のスタaggerド格子を用いた．圧力や温度などのスカラー量をセルの中心に定義し，ベクトル量である速度をセルの境界に定義する^[17]．

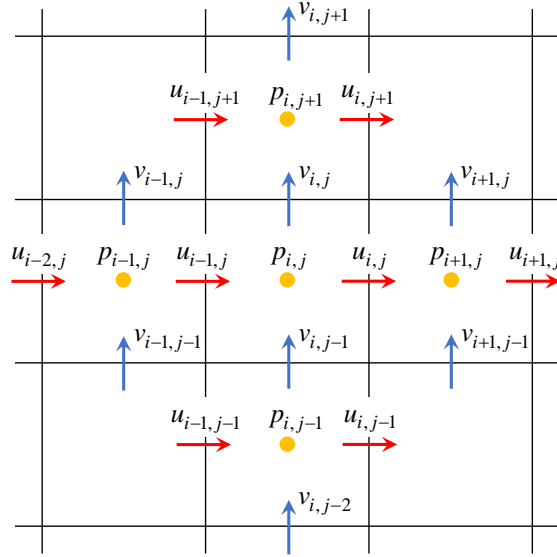


Fig. 2-1 スタaggerド格子の定義点

2.2 支配方程式

支配方程式は以下に示す通りである．

<連続の式>

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.1)$$

<Navier-Stokes 方程式>

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (2.2)$$

<エネルギー方程式>

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \theta = \alpha \nabla^2 \theta \quad (2.3)$$

2.3 無次元の支配方程式

無次元変数と無次元数は以下のように定義する．

－無次元変数－

$$\bar{X} = \frac{\vec{x}}{L}, \quad \bar{U} = \frac{\vec{u}}{u_0}, \quad \tau = \frac{t}{L/u_0}, \quad P = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad \Theta = \frac{\theta - \theta_{cold}}{\theta_{hot} - \theta_{cold}} \quad (2.4)$$

－無次元数－

$$Re = \frac{u_0 L}{\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.5)$$

無次元化した支配方程式は以下ようになる．導出は付録 A を参考のこと．ここで， ∇ は無次元のナブラ演算子である．

<連続の式>

$$\nabla \cdot \bar{U} = 0 \quad (2.6)$$

<Navier-Stokes 方程式>

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau} + (\bar{U} \cdot \nabla) \bar{U} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{U} \quad (2.7)$$

<エネルギー方程式>

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\bar{U} \cdot \nabla) \Theta = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 \Theta \quad (2.8)$$

2.4 離散化スキーム

本研究では時間項に式(2.9)に示すようなオイラー陽解法を用いた．

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right)^n = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta \tau} \quad (2.9)$$

移流項に式(2.10)に示すような UTOPIA^[18]を用いた．UTOPIA では計算する点における速度の正負によって風上を決定し，参照点に計算点と風上側に 2 点，風下側に 1 点の計 4 点を用いて離散化する．計算領域の端と物体の近傍では 1 次風上差分法を用いた．

$$\begin{aligned} \left(U \frac{\partial U}{\partial X} \right)_i &= U_i \frac{-U_{i+2} + 8U_{i+1} - 8U_{i-1} + U_{i-2}}{12\Delta X} \\ &+ \frac{|U_i|}{12} \frac{U_{i+2} - 4U_{i+1} + 6U_i - 4U_{i-1} + U_{i-2}}{\Delta X} \end{aligned} \quad (2.10)$$

その他の離散化には 2 次精度中心差分法を用いた．

2.5 距離関数

距離関数とは壁面境界からの無次元符号付き距離であり，ここでは ϕ とおく．本研究では物体外部を正，物体内部を負とし，スカラー点とベクトル点のすべての位置で定義した．例として，座標 $(1, 1)$ を中心とする半径 0.5 の円柱を計算した．任意の点 (X, Y) における距離関数 ϕ は式(2.11)のように表すことができる．

$$\phi = \sqrt{(X-1)^2 + (Y-1)^2} - 0.5 \quad (2.11)$$

この円まわりの距離関数を可視化したものを Fig.2-2 に示す．図中の黒線は $\phi=0$ の等高線であり，円柱の壁面を示す．円柱の中心で最も値が小さく，計算領域の外側にいくに連れて値が大きくなっていることがわかる．

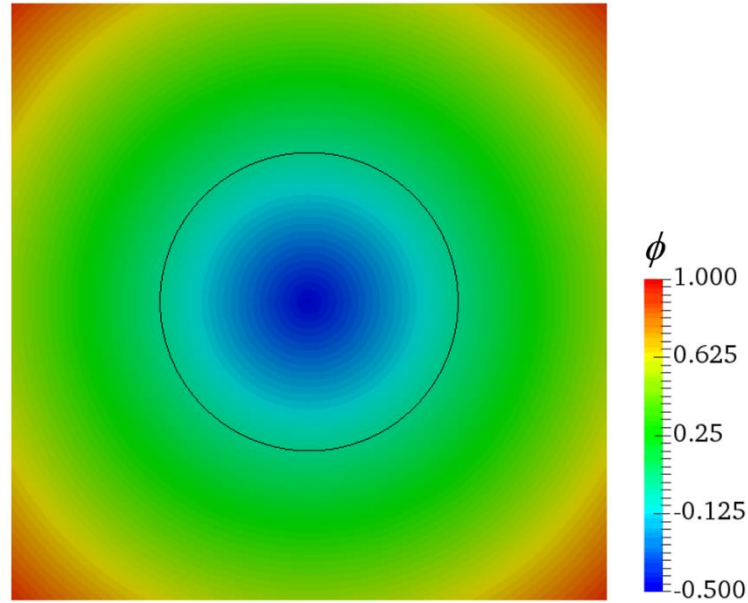


Fig. 2-2 円まわりの距離関数

本研究では距離関数を IB 法の適用範囲の判定，IB 法の補間に用いる係数の計算，物体と流体の遷移領域の計算に用いる．また，距離関数 ϕ の X 方向微分と Y 方向微分をそれぞれ ϕ_X ， ϕ_Y とすると壁面における無次元の単位接線方向ベクトル \vec{e}_S ，単位法線方向ベクトル \vec{e}_N は式(2.12)のように表すことができる．これを用いて IB 法における補間点の座標を計算と速度の接線方向，法線方向への変換をすることができる．

$$\vec{e}_S = \begin{bmatrix} \frac{\phi_Y}{\sqrt{\phi_X^2 + \phi_Y^2}} \\ -\frac{\phi_X}{\sqrt{\phi_X^2 + \phi_Y^2}} \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_N = \begin{bmatrix} \frac{\phi_X}{\sqrt{\phi_X^2 + \phi_Y^2}} \\ \frac{\phi_Y}{\sqrt{\phi_X^2 + \phi_Y^2}} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.6 IB 法

2.6.1 滑りなし条件 (No-Slip Wall)

物体境界に隣接する格子の速度をどのように決定するかは様々な方法が考案されている。本研究では計算の安定性が良く、補間が簡略である Direct Forcing IB 法（直接強制法）^{[3][4]}によって速度を埋め込む。IB 法では式(2.13)のように Navier-Stokes 方程式に外力項 \vec{F}_{IB} を加える。 \vec{F}_{IB} は式(2.14)から式(2.16)のように物体遠方、物体近傍、物体内部によって異なる式で表される。 \vec{U}_{IB} はまわりの速度から補間して求める速度であり、 \vec{U}_B は物体の移動速度である。物体近傍の範囲を表す δ_{IB} は $\delta_{IB} = 1.5\Delta X$ とすることで、物体壁面から少なくとも 1 格子は物体近傍に含むことができる。

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{U} + \vec{F}_{IB} \quad (2.13)$$

物体遠方 ($\delta_{IB} \leq \phi$)

$$\vec{F}_{IB} = \vec{0} \quad (2.14)$$

物体近傍 ($0 < \phi < \delta_{IB}$)

$$\vec{F}_{IB} = (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} + \nabla P - \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{U} + \frac{\vec{U}_{IB} - \vec{U}^n}{\Delta \tau} \quad (2.15)$$

物体内部 ($\phi \leq 0$)

$$\vec{F}_{IB} = (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} + \nabla P - \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{U} + \frac{\vec{U}_B - \vec{U}^n}{\Delta \tau} \quad (2.16)$$

結局、物体遠方では IB 法による操作を行わず、Navier-Stokes 方程式の時間項にオイラー陽解法を用いるため、物体近傍と物体内部では以下のように速度を与えることになる。

物体近傍 ($0 < \phi < \delta_{IB}$)

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}_{IB} \quad (2.17)$$

物体内部 ($\phi \leq 0$)

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}_B \quad (2.18)$$

\vec{U}_B は移動物体では物体の移動速度である。本研究では \vec{U}_{IB} を以下のように与えた。

$$\vec{U}_{IB} = \frac{A_{IP1} \vec{U}_{IP1} + A_{IP2} \vec{U}_{IP2} + A_B \vec{U}_B}{A} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} A = \delta_{IP1} \delta_{IP2} (\delta_{IP2} - \delta_{IP1}), & A_{IP1} = \delta_{IP2} \phi (\delta_{IP2} - \phi), & A_{IP2} = \delta_{IP1} \phi (\phi - \delta_{IP1}) \\ A_B = (\phi - \delta_{IP1}) (\delta_{IP1} - \delta_{IP2}) (\delta_{IP2} - \phi) \end{cases} \quad (2.20)$$

式(2.19)は Fig.2-3 に示すような IB 法によって速度を与えている．これは物体壁面上の B 点の速度 \vec{U}_B と物体壁面から δ_{IP1} 離れた IP1 点の速度 \vec{U}_{IP1} と δ_{IP2} 離れた IP2 点の速度 \vec{U}_{IP2} の計 3 点の速度を用いたラグランジュ補間によって物体近傍の IB 点に速度を与えることを意味する． \vec{U}_{IP1} と \vec{U}_{IP2} はそれぞれ IP1 点と IP2 点の近傍 4 点の速度を用いて線形補間し求める．この補間方法に関しては付録 B で詳しく述べる．また， $\delta_{IP1}=3.0\Delta X$ ， $\delta_{IP2}=4.5\Delta X$ とした．

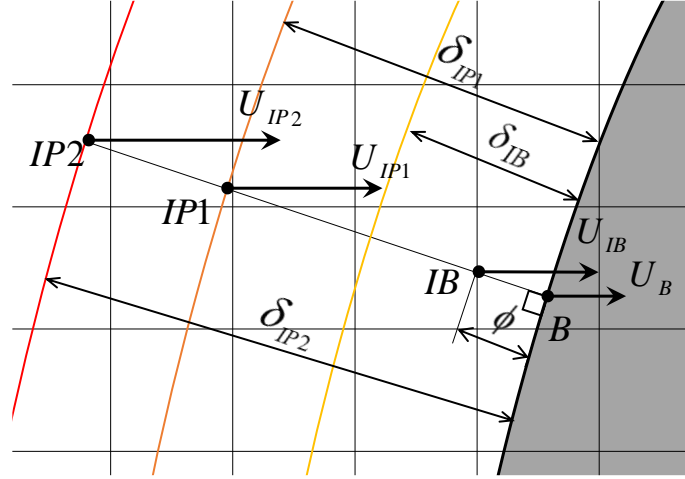


Fig. 2-3 物体近傍の補間（滑りなし条件）

2.6.2 滑り条件（Slip Wall）

滑り条件では物体遠方と物体内部は 2.6.1 節の滑りなし条件と同様にして与える^[3]．物体近傍の速度 \vec{U}_{IB} は Fig.2-4 のように壁面接線方向速度 U_S と壁面法線方向速度 U_N に変換して条件を与える．IB 点での壁面接線方向速度 U_{SIB} と壁面法線方向速度 U_{NIB} を求め， U_{SIB} と U_{NIB} を X 方向速度 U_{IB} と Y 方向速度 V_{IB} に変換することで物体の影響を与える．壁面接線方向速度は法線方向勾配 $U_S/N|_B = 0$ となるように与え，壁面法線方向速度は物体壁面で流入出がないことが表されるように与える． U_{SIB} は式(2.21)のように物体壁面から δ_{IP} 離れた IP 点の壁面接線方向速度 U_{SIP} をそのまま U_{SIB} に与える．これは IB 点での法線方向勾配の 1 次精度前進差分が 0 であることに等しい．ここで， $\delta_{IP}=3.0\Delta X$ とした．

$$U_{SIB} = U_{SIP} \quad (2.21)$$

U_{NIB} は式(2.22)のように物体壁面上の B 点の壁面接線方向速度 U_{NB} と IP 点の壁面接線方向速度 U_{NIP} の 2 点の速度を用いた線形補間で与える．

$$U_{NIB} = \frac{\phi U_{NIP} + (\delta_{IP} - \phi) U_{NB}}{\delta_{IP}} \quad (2.22)$$

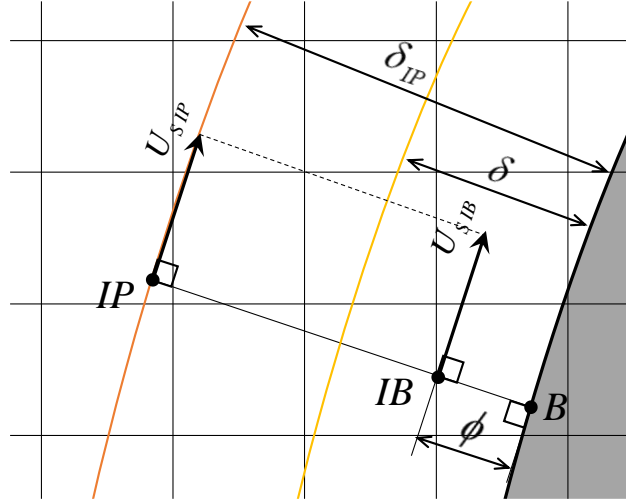
U_{NB} は物体の移動速度を法線方向速度に変換して与える．本研究では静止物体でしか滑り条件を用いないため， $U_{NB}=0$ となる． U_{SIP} と U_{NIP} は IP 点の速度 \vec{U}_{IP} を近傍の 4 点から補

間して求め、壁面接線方向と壁面法線方向に変換し求める．単位接線方向ベクトル $\vec{e}_S = (S_X, S_Y)$ ，単位法線方向ベクトル $\vec{e}_N = (N_X, N_Y)$ とすると，この変換は行列 \mathbf{A} を用いて式(2.23)のように表される．また，IB 点で求めた U_{SIB} と U_{NIB} は式(2.24)を用いて U_{IB} と V_{IB} に変換する． \vec{e}_S と \vec{e}_N は 2.5 節で述べた通り距離関数 ϕ を用いて求める．

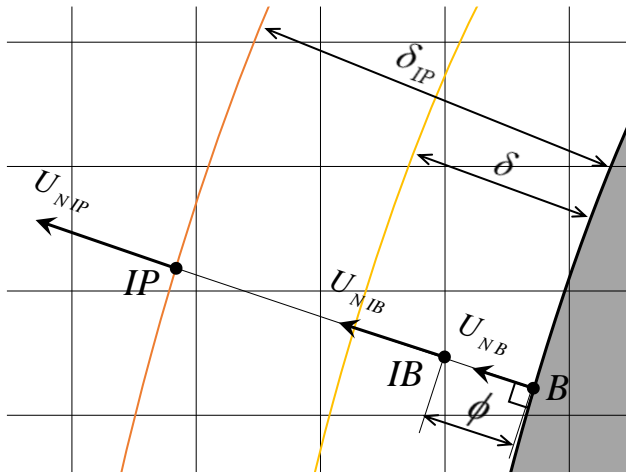
$$\begin{bmatrix} U_{SIP} \\ U_{NIP} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_{IP} \\ V_{IP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{IP}S_X + V_{IP}S_Y \\ U_{IP}N_X + V_{IP}N_Y \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} U_{IB} \\ V_{IB} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} U_{SIB} \\ U_{NIB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{SIB}N_Y - U_{NIB}S_Y \\ -U_{SIB}N_X + U_{NIB}S_X \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} S_X & S_Y \\ N_X & N_Y \end{bmatrix} \quad (2.25)$$



(a) 接線方向速度



(b) 法線方向速度

Fig. 2-4 物体近傍の補間 (滑り条件)

2.7 壁面における温度境界条件

2.7.1 等温加熱条件

速度境界条件と同様に IB 法を用いて物体内部と壁面近傍の温度を与える. 式(2.26)のようにエネルギー方程式に熱量 Q_{IB} を加える. Q_{IB} は式(2.27)から式(2.29)のように物体遠方, 物体近傍, 物体内部によって異なる式で表される. Θ_{IB} はまわりの温度から補間して求める温度であり, Θ_B は物体の壁面温度である. 物体近傍の範囲を表す δ_{IB} はここでも $\delta_{IB} = 1.5\Delta X$ とした.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \nabla) \Theta = \frac{1}{PrRe} \nabla^2 \Theta + Q_{IB} \quad (2.26)$$

物体遠方 ($\delta_{IB} \leq \phi$)

$$Q_{IB} = 0 \quad (2.27)$$

物体近傍 ($0 < \phi < \delta_{IB}$)

$$Q_{IB} = (\vec{U} \cdot \nabla) \Theta - \frac{1}{PrRe} \nabla^2 \Theta + \frac{\Theta_{IB} - \Theta^n}{\Delta \tau} \quad (2.28)$$

物体内部 ($\phi \leq 0$)

$$Q_{IB} = (\vec{U} \cdot \nabla) \Theta - \frac{1}{PrRe} \nabla^2 \Theta + \frac{\Theta_B - \Theta^n}{\Delta \tau} \quad (2.29)$$

結局, 物体遠方では IB 法による操作を行わず, エネルギー方程式の時間項にオイラー陽解法を用いるため, 物体近傍と物体内部では以下のように温度を与えることになる.

物体近傍 ($0 < \phi < \delta_{IB}$)

$$\Theta^{n+1} = \Theta_{IB} \quad (2.30)$$

物体内部 ($\phi \leq 0$)

$$\Theta^{n+1} = \Theta_B \quad (2.31)$$

Θ_B は物体の壁面温度であるため等温加熱条件では一定の値を持つ. 本研究では Θ_{IB} を以下のように与えた.

$$\Theta_{IB} = \frac{A_{IP1}\Theta_{IP1} + A_{IP2}\Theta_{IP2} + A_B\Theta_B}{A} \quad (2.32)$$

$$\begin{cases} A = \delta_{IP1}\delta_{IP2}(\delta_{IP2} - \delta_{IP1}), & A_{IP1} = \delta_{IP2}\phi(\delta_{IP2} - \phi), & A_{IP2} = \delta_{IP1}\phi(\phi - \delta_{IP1}) \\ A_B = (\phi - \delta_{IP1})(\delta_{IP1} - \delta_{IP2})(\delta_{IP2} - \phi) \end{cases} \quad (2.33)$$

これは物体壁面上の B 点の温度 Θ_B と物体壁面から δ_{IP1} 離れた IP1 点の温度 Θ_{IP1} と δ_{IP2} 離れた IP2 点の温度 Θ_{IP2} の計 3 点の温度を用いたラグランジュ補間によって物体近傍の IB 点に

温度を与えることを意味する．ここでも $\delta_{IP1}=3.0\Delta X$, $\delta_{IP2}=4.5\Delta X$ とした．

2.7.2 断熱条件

断熱条件では物体遠方と物体内部は 2.7.1 節の等温加熱条件と同様にして与える．物体近傍の温度 Θ_{IB} は式(2.34)のように物体壁面から δ_{IP} 離れた IP 点の温度 Θ_{IP} をそのまま Θ_{IB} に与える．これは IB 点での法線方向勾配の 1 次精度前進差分が 0 であることに等しい．ここで， $\delta_{IP}=3.0\Delta X$ とした．

$$\Theta_{IB} = \Theta_{IP} \quad (2.34)$$

2.7.3 物体内の熱伝導計算

エネルギー方程式のみ式(2.35)のように物体と流体の物性値の違いを考慮した式を用いることで，物体の熱伝導を計算する．比熱 C は流体側では定圧比熱 C_p を用いる．

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \theta = \frac{1}{\rho C} \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} \theta) \quad (2.35)$$

無次元変数と無次元数は以下のように定義する．添え字 G は気相側の物性値を表す．

－無次元変数－

$$\bar{X} = \frac{\bar{x}}{L}, \quad \vec{U} = \frac{\vec{u}}{u_0}, \quad \tau = \frac{t}{L/u_0}, \quad P = \frac{p}{\rho_G u_0^2}, \quad \Theta = \frac{\theta - \theta_{cold}}{\theta_{hot} - \theta_{cold}}, \quad (2.36)$$

$$\rho_C = \frac{\rho}{\rho_G}, \quad C_C = \frac{C}{C_G}, \quad k_C = \frac{k}{k_G}$$

－無次元数－

$$Re = \frac{u_0 L}{\nu_G}, \quad Pr = \frac{\nu_G}{\alpha_G} \quad (2.37)$$

無次元化したエネルギー方程式は式(2.38)のようになる．

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \Theta = \frac{1}{\rho_C C_C Pr Re} \nabla \cdot (k_C \nabla \Theta) \quad (2.38)$$

$\nabla \cdot (k_C \nabla \Theta)$ は式(3.39)のように離散化した．

$$\begin{aligned} \{\nabla \cdot (k_C \nabla \Theta)\}_{i,j} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(k_C \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(k_C \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) \right\}_{i,j} \\ &= \frac{\frac{k_{Ci+1,j} + k_{Ci,j}}{2} \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i,j}}{\Delta X} - \frac{k_{Ci,j} + k_{Ci-1,j}}{2} \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i-1,j}}{\Delta X}}{\Delta X} \\ &\quad + \frac{\frac{k_{Ci,j+1} + k_{Ci,j}}{2} \frac{\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j}}{\Delta Y} - \frac{k_{Ci,j} + k_{Ci,j-1}}{2} \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i,j-1}}{\Delta Y}}{\Delta Y} \end{aligned} \quad (2.39)$$

物性値を物体と流体で区別した場合，格子形状に依存した結果になる．そこで本研究では物

体壁面に物体と流体の遷移領域を作り任意形状を再現した．遷移領域を持つ Heaviside 関数 He ^[19]を用いて各物性値を式(3.40)から式(3.42)のように計算した．添え字 S は物体側の物性値を表し，添え字 G は気相側を表す．

$$\rho = \rho_G + (\rho_S - \rho_G)He \quad (2.40)$$

$$C = C_G + (C_S - C_G)He \quad (2.41)$$

$$k = k_G + (k_S - k_G)He \quad (2.42)$$

He は距離関数 ϕ を用いて式(2.43)のように表す． δ は遷移領域の厚さであり， $\delta = 1.5\Delta X$ とした． $\Delta X = 1.0$ のとき He の形状は Fig.2-5 のようになる．

$$He = \begin{cases} 1 & (\phi < -\delta) \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\phi}{\delta} - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\delta}\right) \right\} & (-\delta \leq \phi \leq \delta) \\ 0 & (\phi > \delta) \end{cases} \quad (2.43)$$

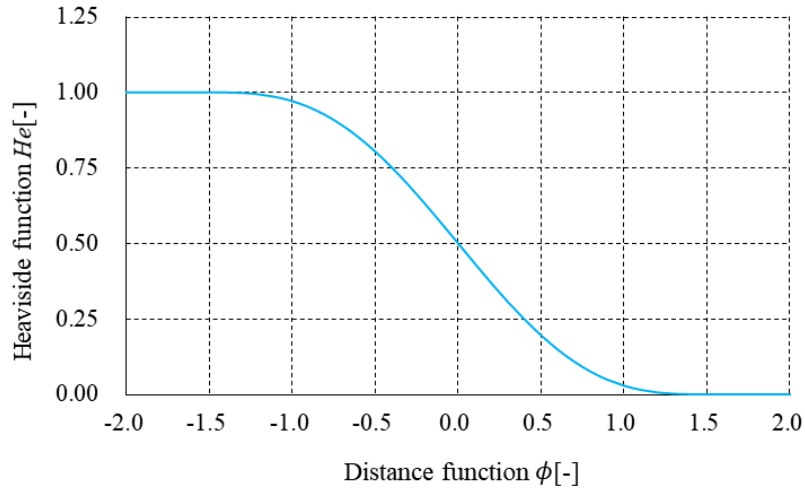


Fig. 2-5 遷移領域をもつ Heaviside 関数

式(2.40)，(2.41)，(2.42)の両辺をそれぞれ ρ_G ， C_G ， k_G で割ることで無次元変数 ρ_C ， C_C ， k_C は式(2.44)から式(2.46)のように表すことができる．ここで， $\bar{\rho}$ ， \bar{C} ， \bar{k} はそれぞれ流体を基準とした物体と流体の密度比，比熱比，熱伝導率比である．

$$\rho_C = \frac{\rho}{\rho_G} = 1 + (\bar{\rho} - 1)He \quad (2.44)$$

$$C_C = \frac{C}{C_G} = 1 + (\bar{C} - 1)He \quad (2.45)$$

$$k_C = \frac{k}{k_G} = 1 + (\bar{k} - 1)He \quad (2.46)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_S}{\rho_G}, \quad \bar{C} = \frac{C_S}{C_G}, \quad \bar{k} = \frac{k_S}{k_G} \quad (2.47)$$

2.8 計算フロー

計算フローを Fig.2-6 に示す．本研究では GPU による並列計算を行った．GPU を用いて計算した処理は左に「GPU」と表記した．本研究では Projection 法^[20]を用いたため，Navier-Stokes 方程式によって速度の予測値を計算する際，圧力項を省いて計算し，圧力修正を行った上で圧力項を足す．圧力修正の反復法は並列計算を行う際に隣接点の値のステップが混同することを避けるために Red & Black SOR 法^[21]を用いた．

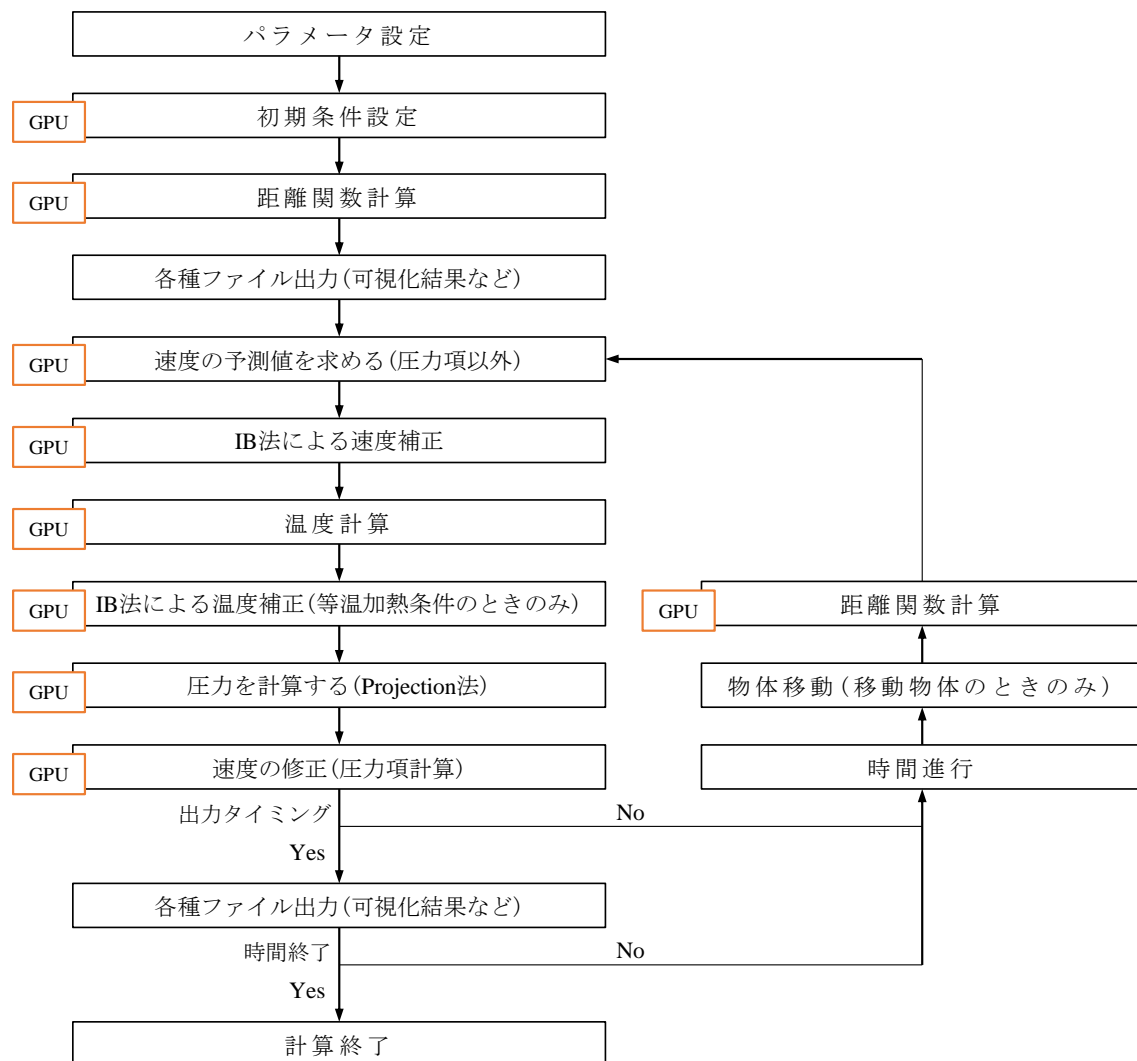


Fig. 2-6 計算フロー

第3章

計算の妥当性検証

3.1 平板境界層流れ（等温加熱条件）

3.1.1 計算モデル

IB法の精度の確認のために壁面境界で等温加熱条件を与えた平板境界層流れを計算し、定量的に評価した。格子に対する平板の角度 $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ の4つ計算し、平板に平行な一様流を与える。また、無次元格子幅を $\Delta X = 1.0 \times 10^{-2}$ （代表長さに100格子）、 $\Delta X = 5.0 \times 10^{-3}$ （代表長さに200格子）、 2.5×10^{-3} （代表長さに400格子）、 1.25×10^{-3} （代表長さに800格子）の4つ計算した。Fig.3-1の(a)と(b)に示すように滑りなし条件と等温加熱条件を与えた平板を長さ $3L$ 用意し、滑り条件と断熱条件を与えた平板をその前に長さ L 用意した。Navier-Stokes方程式をもとに平板境界層流れを計算する際、滑りなし条件を与えた先端位置が特異点になり、そこから圧力勾配が発生する。この圧力勾配を解くために特異点のまわりに空間を作る必要がある。そのため、流れに影響が出ないように滑り条件と断熱条件を与えた平板を特異点の前に置いた。 $\psi = 0^\circ$ のとき法線方向の計算領域は平板から L だけ用意し、平板の高さ $d = 0.1L$ とする。格子に平行でない平板の計算において、Fig.3-1の(b)に示すように、少なくとも $\psi = 0^\circ$ の計算空間が含まれるように、 $\psi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ における計算領域の x 方向長さ L_x と y 方向長さ L_y をそれぞれ $(L_x, L_y) = (4.3L, 2.2L), (4.1L, 3.0L), (4.2L, 4.2L)$ とした。接線方向座標 s と法線方向座標 n の原点は滑りなし条件と等温加熱条件を与えた平板の先端とする。境界条件は式(3.1)から式(3.4)の通りである。流入面で平板に平行な一様流を与え、流出面では壁面接線方向勾配または壁面法線方向勾配が0になるように設定した。圧力は全て反射条件とした。式(3.2)と式(3.3)の離散化と式展開については付録Cで述べる。

$$\begin{aligned} \text{左面:} \quad & u = u_{in} \cos \psi, \quad v = u_{in} \sin \psi, \quad \theta = \theta_{cold} \quad (\text{物体外部}) \\ & \vec{u} = \vec{0}, \quad \theta = \theta_{hot} \quad (\text{物体内部}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{右面:} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} = 0 \quad (3.2)$$

$$\text{上面:} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{下面:} \quad & u = u_{in} \cos \psi, \quad v = u_{in} \sin \psi, \quad \theta = \theta_{cold} \quad (\text{物体外部}) \\ & \vec{u} = \vec{0}, \quad \theta = \theta_{hot} \quad (\text{物体内部}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

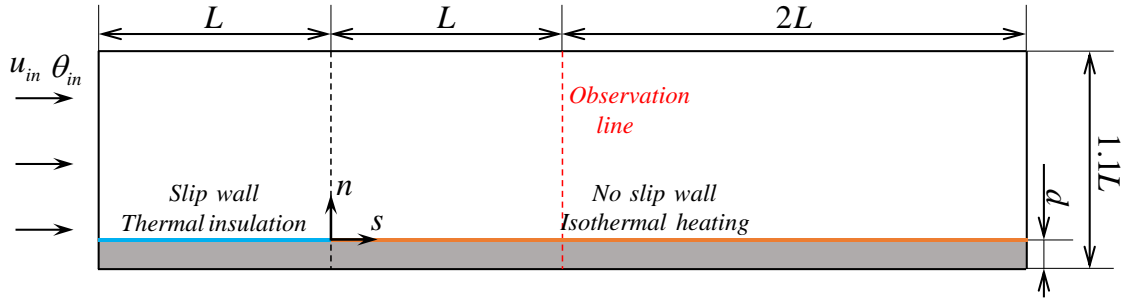
代表速度 $u_0 = u_{in}$ とする。各パラメータをTable 3-1に示す。ここで、密度などの物性値は温

度依存しないと仮定し，浮力項は無視するものとする．

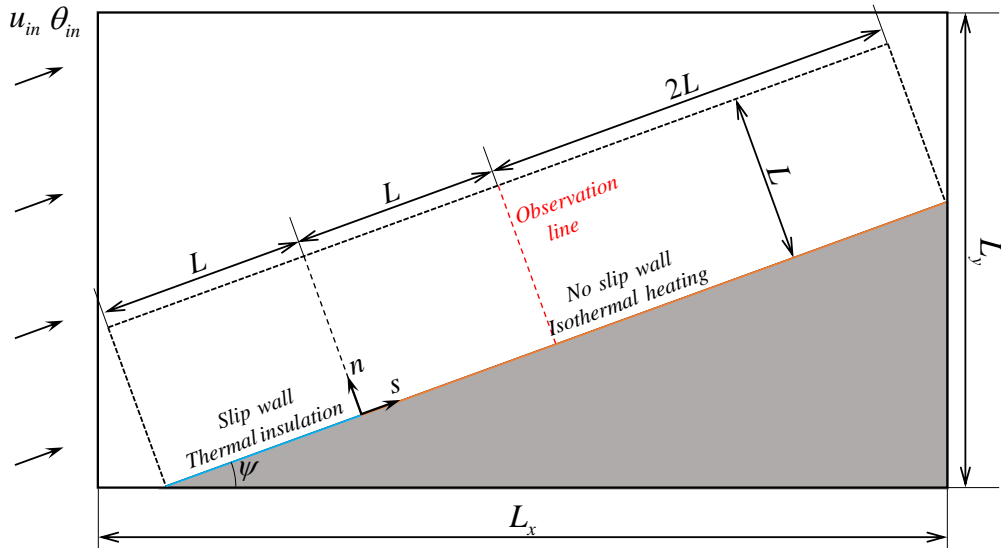
Table 3-1 計算パラメータ

無次元格子幅 ΔX	1.0×10^{-2} , 5.0×10^{-3} , 2.5×10^{-3} , 1.25×10^{-3}
無次元時間刻み $\Delta \tau$	1.0×10^{-4}
Reynolds 数	1.0×10^4
Prandtl 数	0.7

定量的な評価として，定常状態まで計算し，Fig.3-1 に赤の点線で示した $s=L$ の位置での無次元接線方向速度 U_s と無次元法線方向速度 U_N ，無次元温度 θ の分布と壁面上の $\partial U_s / \partial N$ と局所ヌセルト数 Nu を用いた．本計算との比較に Blasius 方程式を 4 次精度の Runge-Kutta 法によって解いたものを用いた．この解法の詳細については付録 D で述べる．また， $\partial U_s / \partial N$ と Nu の求め方については付録 E で述べる．



(a) 格子に平行な平板 ($\psi = 0^\circ$)

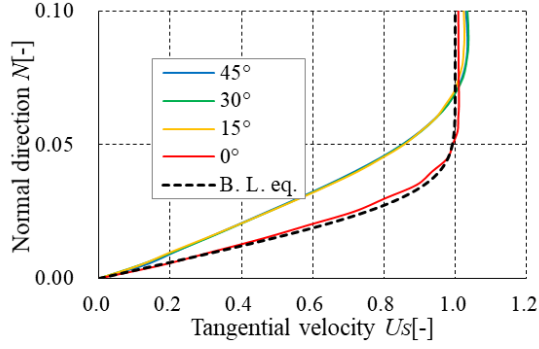


(b) 格子に平行でない平板

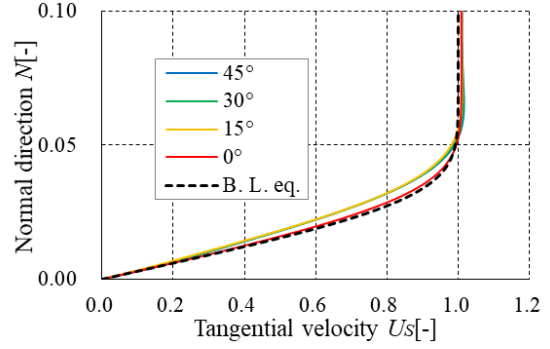
Fig. 3-1 計算モデル (平板境界層流れ)

3.1.2 計算結果

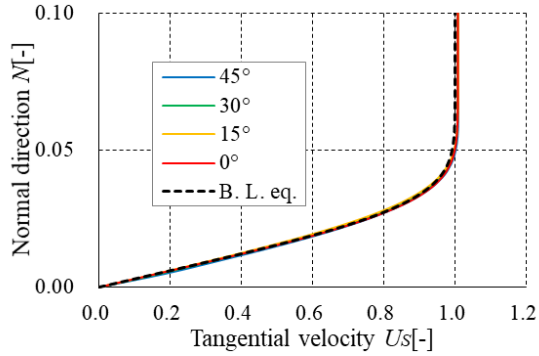
Fig.3-1 の赤点線部の U_S , U_N , θ の分布を Fig.3-2 から Fig.3-4 に示す. 比較のために Blasius 方程式を 4 次精度の Runge-Kutta 法によって解いた値を黒の点線で示す. 参考のために付録 F で計算領域全体の可視化結果を示した.



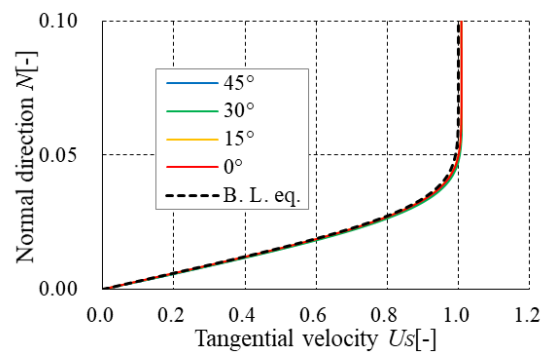
(a) $\Delta X = 1.0 \times 10^{-2}$



(b) $\Delta X = 5.0 \times 10^{-3}$

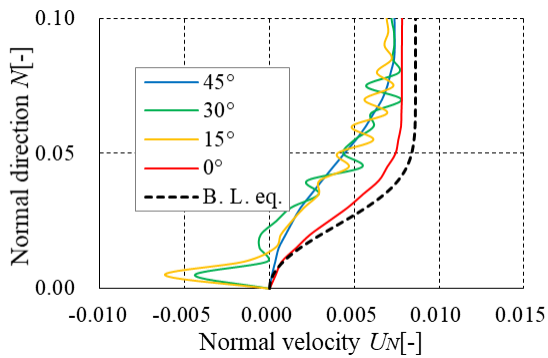


(c) $\Delta X = 2.5 \times 10^{-3}$

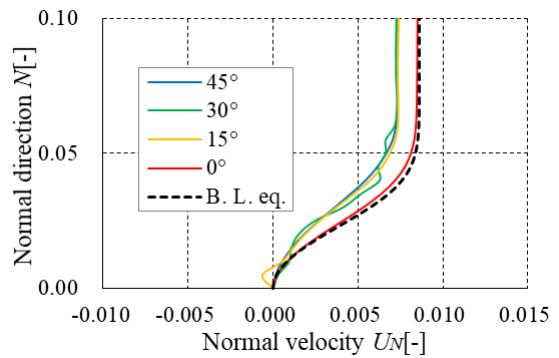


(d) $\Delta X = 1.25 \times 10^{-3}$

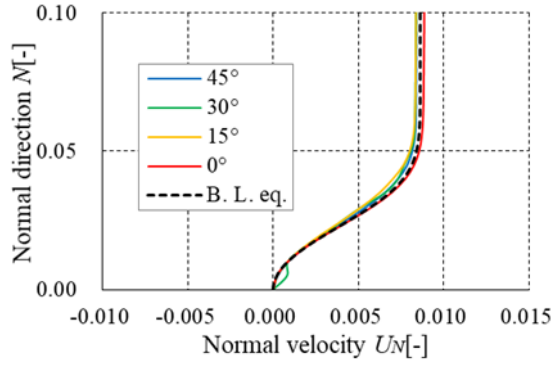
Fig. 3-2 接線方向速度の分布



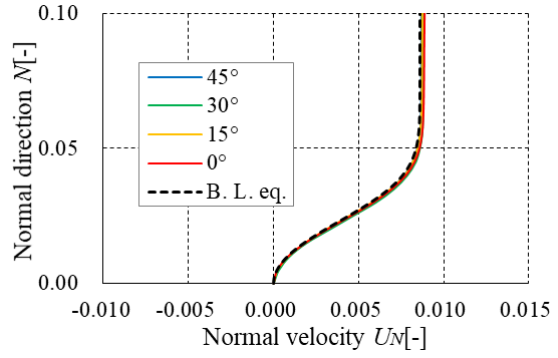
(a) $\Delta X = 1.0 \times 10^{-2}$



(b) $\Delta X = 5.0 \times 10^{-3}$

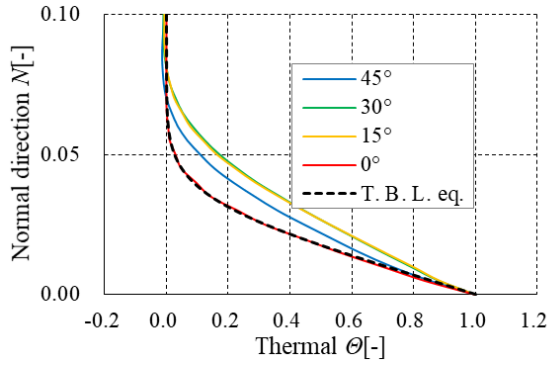


(c) $\Delta X = 2.5 \times 10^{-3}$

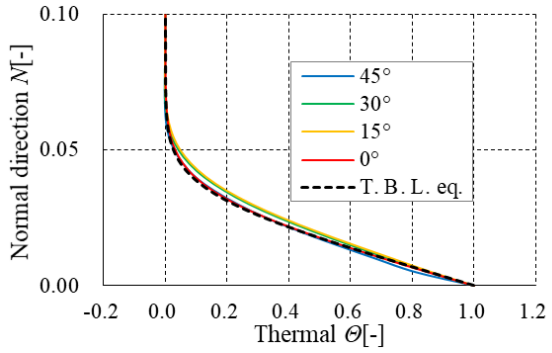


(d) $\Delta X = 1.25 \times 10^{-3}$

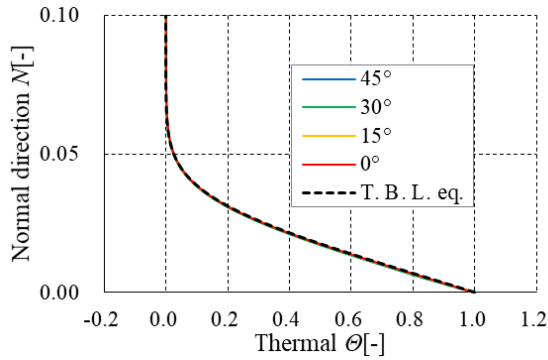
Fig. 3-3 法線方向速度の分布



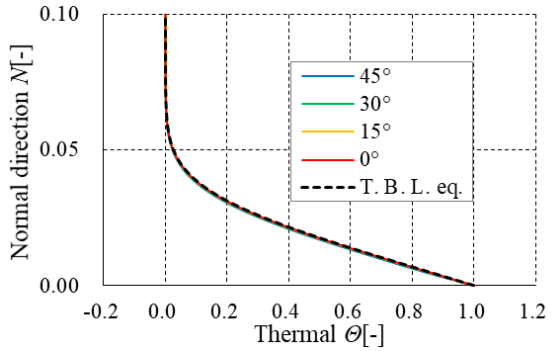
(a) $\Delta X = 1.0 \times 10^{-2}$



(b) $\Delta X = 5.0 \times 10^{-3}$



(c) $\Delta X = 2.5 \times 10^{-3}$



(d) $\Delta X = 1.25 \times 10^{-3}$

Fig. 3-4 温度の分布

Fig.3-2 から $\Delta X = 1.0 \times 10^{-2}$ を除いて接線方向速度は概ね一致していることがわかる。 $\Delta X = 1.0 \times 10^{-2}$ では $\psi = 0^\circ$ を除いて境界層が厚くなった。また、 $\Delta X = 5.0 \times 10^{-3}$ の $\psi = 30^\circ$ 、 45° において $N = 7.0 \times 10^{-2}$ 付近で一様流より U_s が約1% 大きくなった。 $\Delta X = 2.5 \times 10^{-3}$ と $\Delta X = 1.25 \times 10^{-3}$ はよく一致した。Fig.3-3 からすべての格子幅において法線方向速度は平板角度によって異なる傾向を示した。特に、 $\Delta X = 1.0 \times 10^{-2}$ の $\psi = 15^\circ$ 、 30° と $\Delta X = 5.0 \times 10^{-3}$

の $\psi=15^\circ$ において壁面付近で U_N が負の値を示した．特に， $\Delta X=1.0\times 10^{-2}$ では負の速度が顕著に出た．これは圧力修正を行う際に物体の密度を考慮せずに計算するため，物体内に速度が流入しているからだと考えられる．Fig.3-4 から $\Delta X=1.0\times 10^{-2}$ を除いて温度分布はよく一致していることがわかる． $\Delta X=1.0\times 10^{-2}$ では $\psi=0^\circ$ を除いて， $N=9.0\times 10^{-2}$ 付近で無次元温度が負の値を示した．ここでは非圧縮性流体を仮定しているため， $\Delta X=1.0\times 10^{-2}$ でエネルギー保存則を満たしていないことが考えられる．平板境界層流れにおいて， $U_S=0.99$ となる境界層厚さ δ [m] は式(3.5)のように近似される^[22]．

$$\frac{\delta}{L} \approx 5.0 \sqrt{\frac{S}{Re}} \quad (3.5)$$

$Re=1.0\times 10^4$ ， $S=1$ のとき $\delta/L \approx 5.0\times 10^{-2}$ となる． $\Delta X=5.0\times 10^{-3}$ より格子幅が細かいとき各値の分布が概ね一致していることから，境界層内に格子が10格子程度必要であるといえる．

Table 3-2 に $s=L$ における無次元接線方向速度 U_S の無次元法線方向勾配 $\partial U_S/\partial N$ を Table 3-3 に $s=L$ における局所ヌセルト数 Nu を示す．Table3-2 と Table3-3 の括弧内には付録 E で述べた比較値 $\partial U_S/\partial N=33.21$ ， $Nu=29.27$ との誤差を示す．

Table 3-2 $\partial U_S/\partial N$

ψ [deg]	$\Delta X=1.0\times 10^{-2}$	$\Delta X=5.0\times 10^{-3}$	$\Delta X=2.5\times 10^{-3}$	$\Delta X=1.25\times 10^{-3}$
0	34.69 (4.46%)	34.44 (3.70%)	33.80 (1.78%)	33.42 (0.63%)
15	20.89 (-37.10%)	29.60 (-10.87%)	33.23 (0.06%)	34.15 (2.83%)
30	21.69 (-34.69%)	31.79 (-4.28%)	35.35 (6.44%)	35.83 (7.89%)
45	21.49 (-35.29%)	32.85 (-1.08%)	38.28 (15.27%)	35.83 (7.89%)

Table 3-3 Nu

ψ [deg]	$\Delta X=1.0\times 10^{-2}$	$\Delta X=5.0\times 10^{-3}$	$\Delta X=2.5\times 10^{-3}$	$\Delta X=1.25\times 10^{-3}$
0	32.76 (11.92%)	30.99 (5.88%)	29.73 (1.57%)	29.40 (0.44%)
15	20.58 (-29.69%)	27.60 (-5.71%)	30.07 (2.73%)	30.06 (2.70%)
30	21.38 (-26.96%)	29.83 (1.91%)	31.87 (8.88%)	30.99 (5.88%)
45	28.42 (-2.90%)	38.17 (30.40%)	31.95 (9.16%)	32.60 (11.38%)

$\partial U_S/\partial N$ と Nu どちらも $\Delta X=1.0\times 10^{-2}$ ， $\Delta X=5.0\times 10^{-3}$ において各平板角度に対する精度が安定しなかった． $\Delta X=2.5\times 10^{-3}$ において $\partial U_S/\partial N$ の $\psi=15^\circ$ を除いて平板角度が大きくなるに連れて誤差が大きくなった． $\Delta X=1.25\times 10^{-3}$ においては $\partial U_S/\partial N$ と Nu どちらも平板角度が大きくなるに連れて誤差が大きくなった．よって，壁面での $\partial U_S/\partial N$ と Nu まで安定して解を得るためには境界層境界層内に格子が20格子程度必要であるといえる．

3.2 対流熱伝達計算（物体内の熱伝導計算）

3.2.1 計算モデル

2.7.3 節で述べた物体内の熱伝導を考慮した計算の検証を行うために，熱を持った円柱に一樣流を与え円柱が冷える過程を定性的に評価する．Fig.3-5 に計算モデルを示す．境界条件は式(3.6)から式(3.8)の通りである．流入面で一樣流を与え，流出面ではゾンマーフェルト放射条件を与えた．上下面は滑り断熱条件とした．流出面を圧力の基準値とした．式(3.7)の x 方向勾配は 2 次精度後退差分によって求めた．

$$\text{左面：} \quad u = u_{in}, \quad v = 0, \quad \theta = \theta_{cold}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{右面：} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_{in} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_{in} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad p = 0 \quad (3.7)$$

$$\text{上下面：} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.8)$$

また，代表速度 $u_0 = u_{in}$ とし，初期条件は物体内の速度 0，物体外の流速を $u = u_{in}$ ， $v = 0$ とし，物体内の温度 $\theta = \theta_{hot}$ ，物体外の温度 $\theta = \theta_{cold}$ ，全面で圧力 $p = 0$ とした．各パラメータを Table 3-4 に示す．ここで，密度などの物性値は温度依存しないと仮定し，浮力項は無視するものとする．

Table 3-4 計算パラメータ

無次元格子幅 ΔX	1.0×10^{-2}
無次元時間刻み $\Delta \tau$	1.0×10^{-4}
Reynolds 数	2.0×10^2
Prandtl 数	0.7
密度比 $\bar{\rho}$	10
比熱比 \bar{C}	10
熱伝導率比 \bar{k}	10

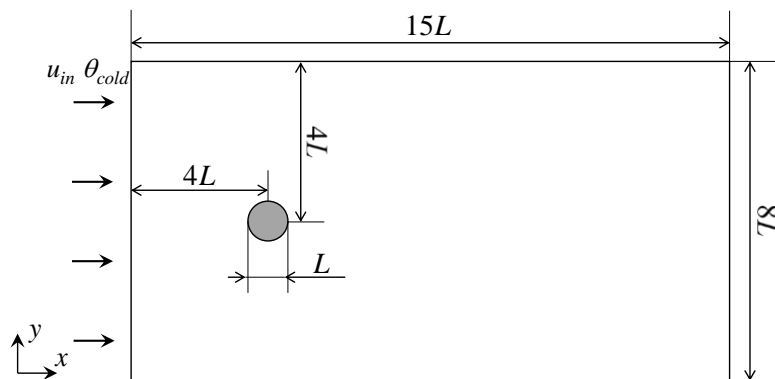


Fig. 3-5 計算モデル（円柱一樣流）

3.2.2 計算結果

円柱まわりの無次元速度の絶対値と無次元温度を Fig.3-6 から Fig.3-13 に示す．物体壁面を白線で表し，Fig.3-7 以降で流線を黒線で示した．

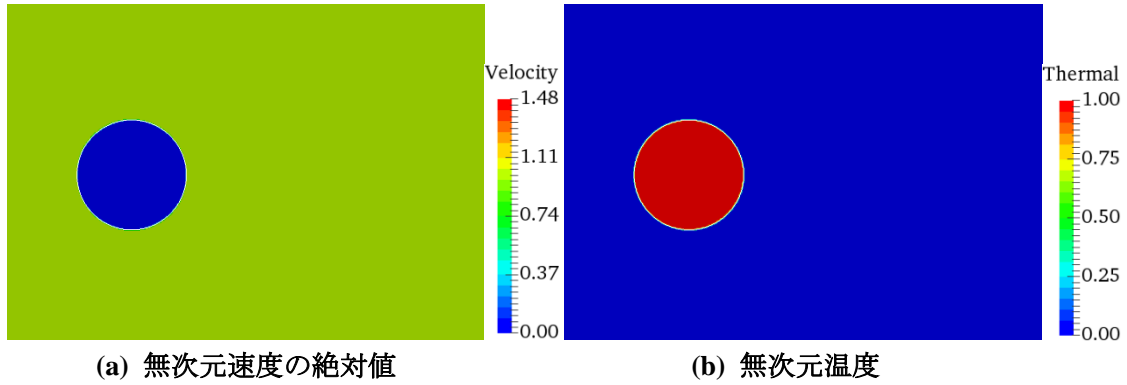


Fig. 3-6 $\tau = 0$ の結果

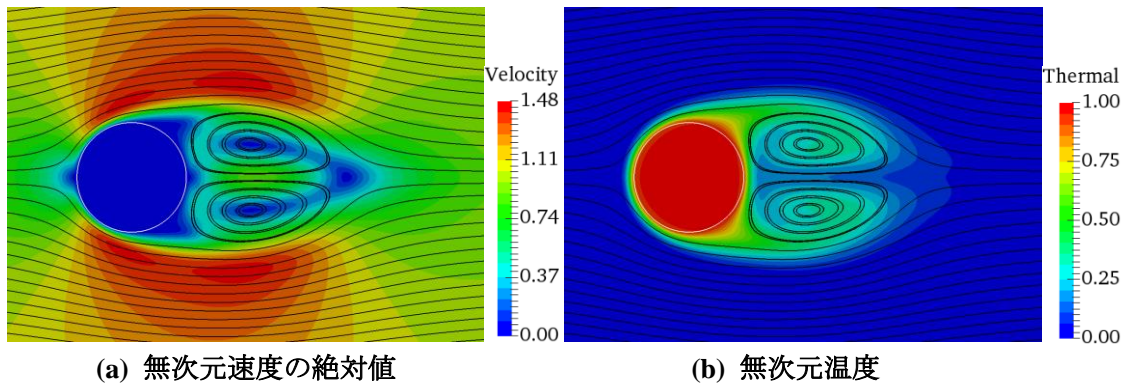


Fig. 3-7 $\tau = 4$ の結果

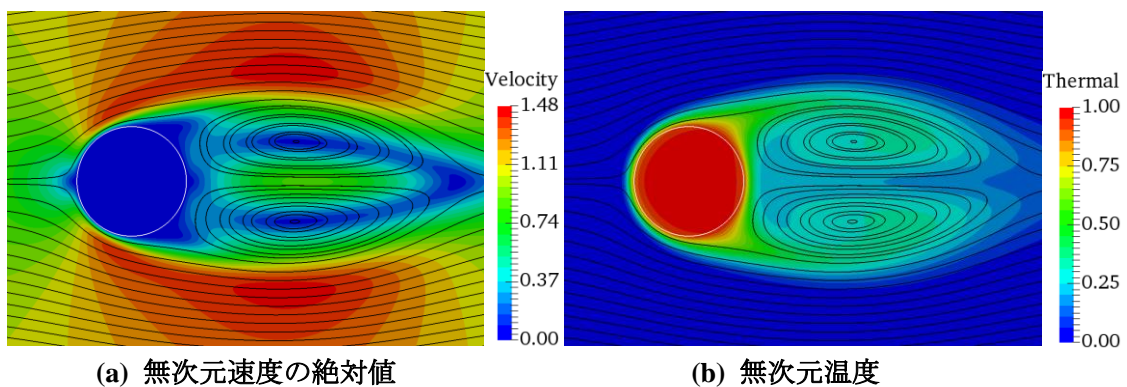


Fig. 3-8 $\tau = 8$ の結果

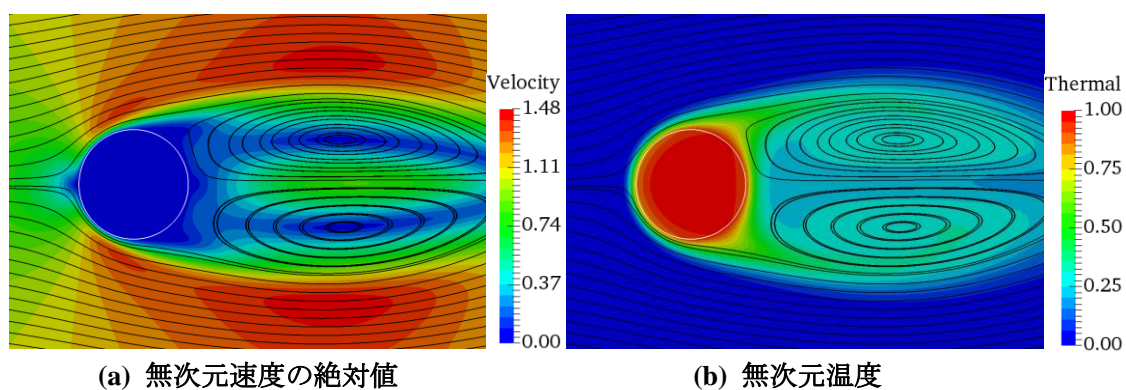


Fig. 3-9 $\tau = 12$ の結果

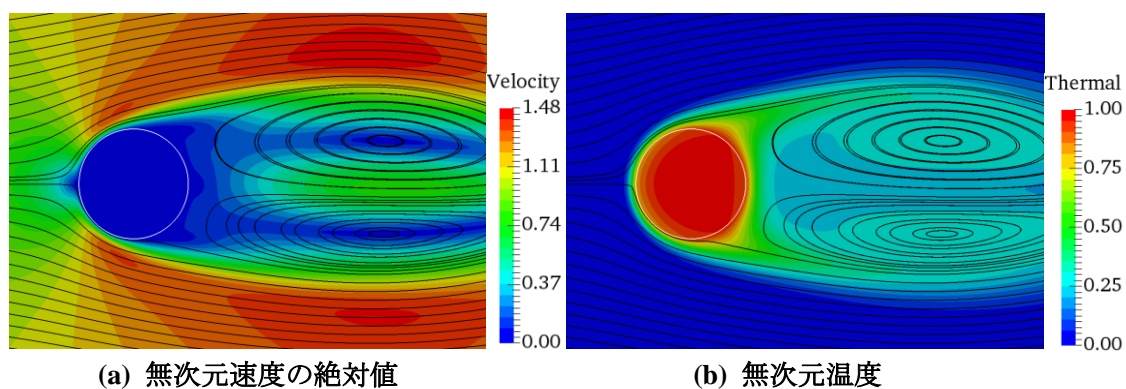


Fig. 3-10 $\tau = 16$ の結果

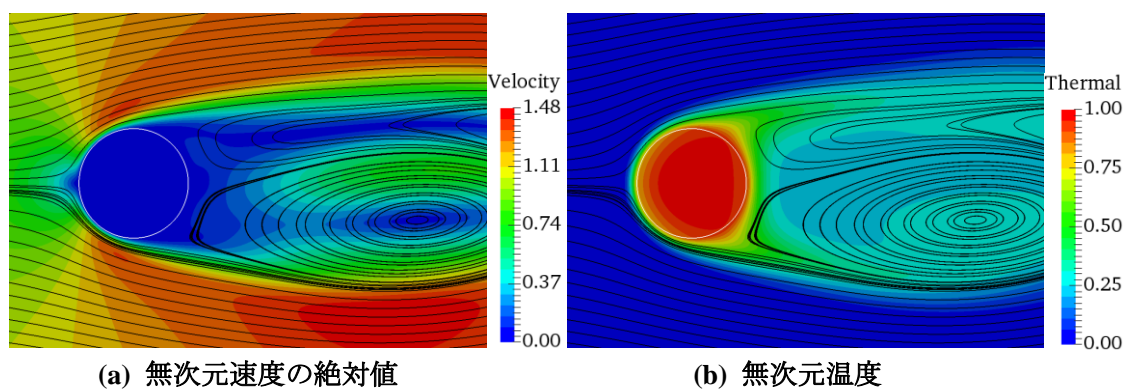


Fig. 3-11 $\tau = 20$ の結果

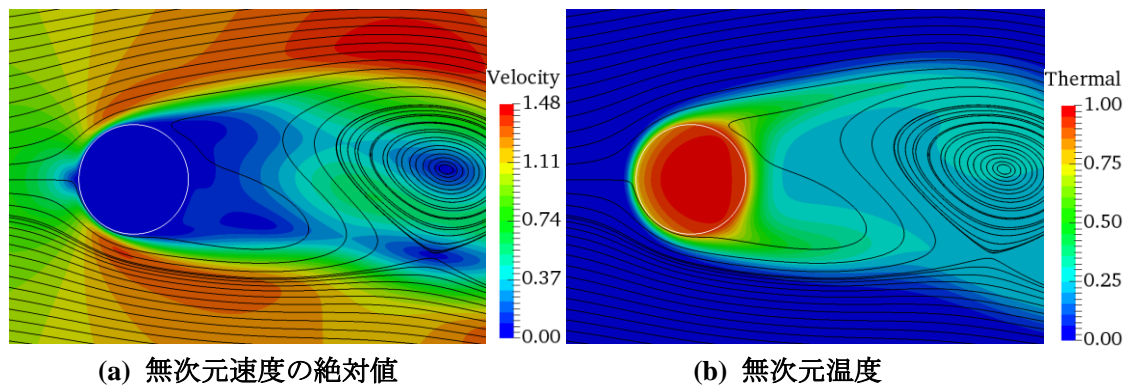


Fig. 3-12 $\tau = 24$ の結果

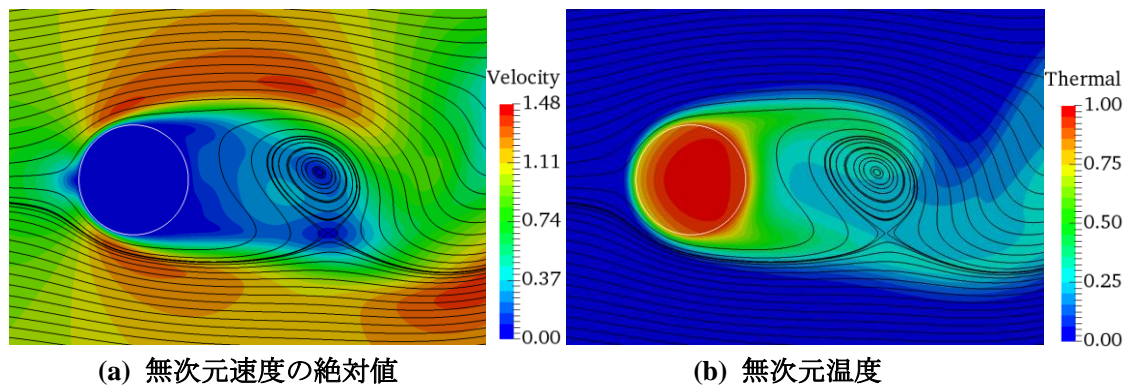


Fig. 3-13 $\tau = 28$ の結果

Karman 渦特有の双子渦が成長し、後流が乱れる様子を確認することができた。円柱は一樣流が当たる前面ではよく冷やされ、流れが剥離する箇所ではあまり冷やされなかった。また、円柱後流で流れが逆流し、円柱に当たるため、円柱後部でも冷却が進んでいることがわかる。これらの結果は定性的に妥当であるといえる。ここでは定性的にこの手法を評価したにすぎないため、今後、定量的な評価を行う必要がある。

第4章

乾燥炉解析への適用

4.1 計算モデル

Fig.4-1 に示すように乾燥炉解析のモデル計算を計算した．格子数を節約するために，ここでは2次元で計算を行った．円柱が乾燥炉内を速さ u_{move} で移動し，上下面から熱風を当て円柱が温められる様子を確認する．Fig.4-1 に熱風の流入部を赤で示し，流出部を青で示した．流入口と流出口の幅は全て $0.5L$ とする．境界条件は式(4.1)から式(4.4)の通りである．左右面は周期境界であり，上下面は流入部で速度 u_{in} ，温度 θ_{hot} の熱風が流入し，流出部で速度 u_{in} で流出し，温度は反射条件とする．側壁では滑り断熱条件とした．圧力は左右面は周期境界であり，上下面は反射条件とした．基準圧力は計算領域の中央とした．

$$\text{左面：} \quad \vec{u}|_{x=0} = \vec{u}|_{x=8L}, \quad \theta|_{x=0} = \theta|_{x=8L} \quad (4.1)$$

$$\text{右面：} \quad \vec{u}|_{x=8L} = \vec{u}|_{x=0}, \quad \theta|_{x=8L} = \theta|_{x=0} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & u=0, \quad v=-u_{in}, \quad \theta=\theta_{hot} \quad (\text{流入部}) \\ \text{上面：} \quad & u=0, \quad v=u_{in}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}=0 \quad (\text{流出部}) \\ & \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad v=0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}=0 \quad (\text{側壁}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & u=0, \quad v=u_{in}, \quad \theta=\theta_{hot} \quad (\text{流入部}) \\ \text{下面：} \quad & u=0, \quad v=-u_{in}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}=0 \quad (\text{流出部}) \\ & \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad v=0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}=0 \quad (\text{側壁}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

初期条件は物体内の速度を $u=u_{move}$ ， $v=0$ ，物体外の世界 0 とした．乾燥炉に入るとき物体は大気温度であり物体内の温度 $\theta=\theta_{cold}$ とする．乾燥炉のスタート位置では空気が少し温められた状態から始まるため，物体外の温度 $\theta=0.5(\theta_{hot}-\theta_{cold})$ とする．また，全面で圧力 $p=0$ とした．

計算領域の x 方向長さが $8L$ であり，左右面を周期境界とするため， $8L$ 間隔で円柱が流れ

る乾燥炉の解析になる．代表速度 $u_0 = u_{move}$ とし，流入速度 u_{in} は $2u_{move}$ ， $4u_{move}$ の 2 つ計算した．円柱が移動するため，2.61 節で述べた IB 法の U_B は物体の移動速度になり，ここでは $U_B = 1$ となる．温度計算においては 3.2 節と同様に 2.7.3 節で述べた手法を用いる．各パラメータを Table 4-1 に示す．ここで，簡単のために密度比，比熱比，熱伝導率比はすべて 10 とした．密度などの物性値は温度依存せず，浮力項は無視できるものとする．ここで，流体側の比熱は等圧比熱を用いる．乾燥炉中の大気の動粘度 $\nu \approx 2.1 \times 10^{-5} [\text{m}^2/\text{s}]$ であるため^[23]， $Re = 1.0 \times 10^2$ のとき $u_{move}L \approx 2.1 \times 10^{-3} [\text{m}^2/\text{s}]$ となる．また， $u_{move} \approx 2.1 \times 10^{-2} [\text{m/s}]$ ， $L = 0.1 [\text{m}]$ のとき代表時間 $t_0 = L/u_{move} \approx 4.76 [\text{s}]$ となる．

Table 4- 1 計算パラメータ

無次元格子幅 ΔX	1.0×10^{-2}
無次元時間刻み $\Delta \tau$	1.0×10^{-4}
Reynolds 数	1.0×10^2
Prandtl 数	0.7
密度比 $\bar{\rho}$	10
比熱比 \bar{C}	10
熱伝導率比 \bar{k}	10
流入速度 u_{in}	$2u_{move}$ ， $4u_{move}$

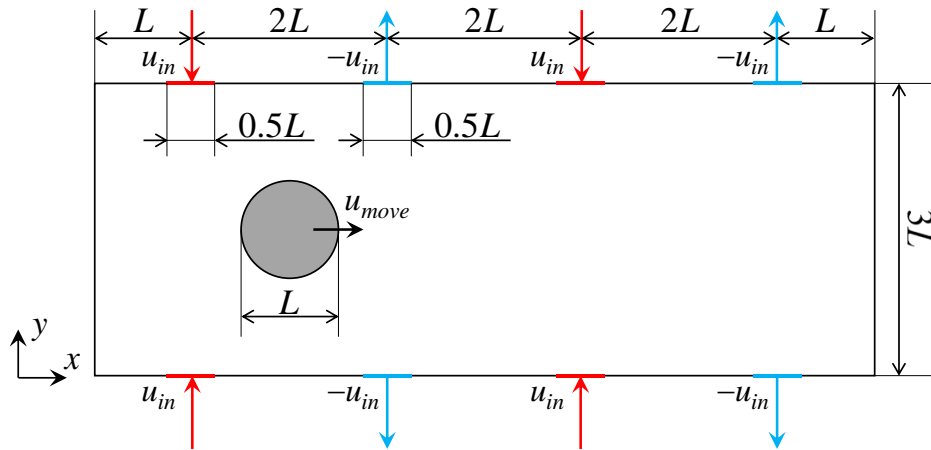


Fig. 4- 1 計算モデル（乾燥炉）

4.2 計算結果

$u_{in} = 2u_{move}$ の無次元速度の絶対値と無次元温度の分布を Fig.4-2 から Fig.4-17 に示す．円柱の壁面を白線で表し，図中のベクトルは速度を示す．

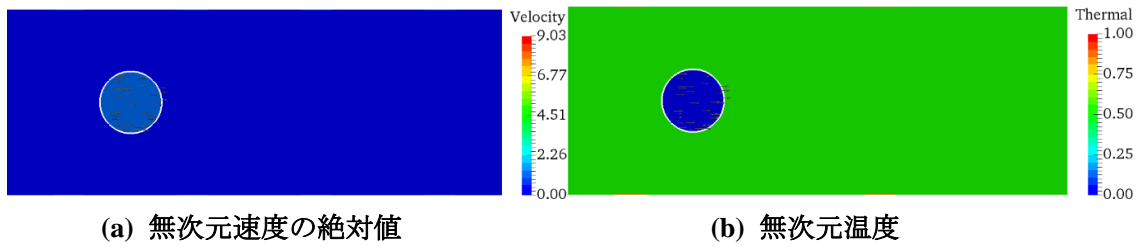


Fig. 4-2 $u_{in} = 2u_{move}$ の結果 ($\tau = 0$)

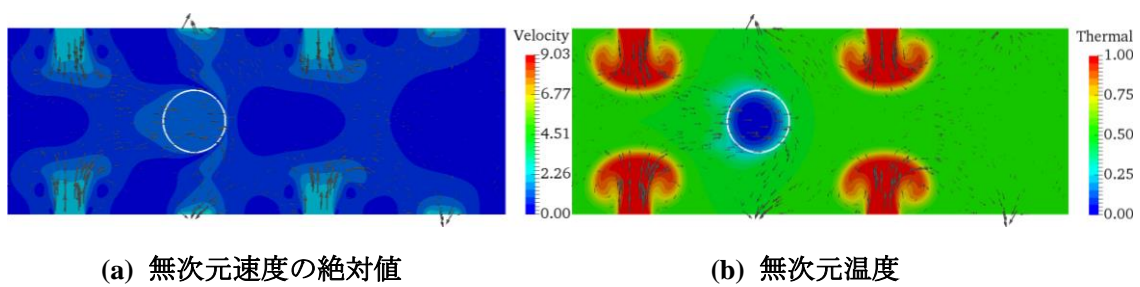


Fig. 4-3 $u_{in} = 2u_{move}$ の結果 ($\tau = 1$)

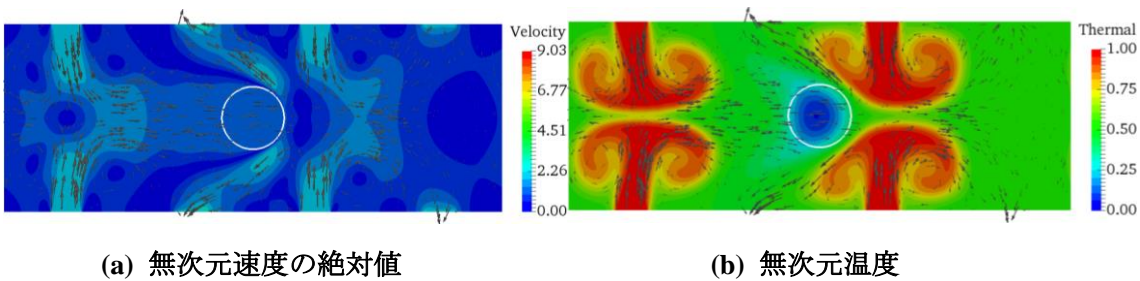


Fig. 4-4 $u_{in} = 2u_{move}$ の結果 ($\tau = 2$)

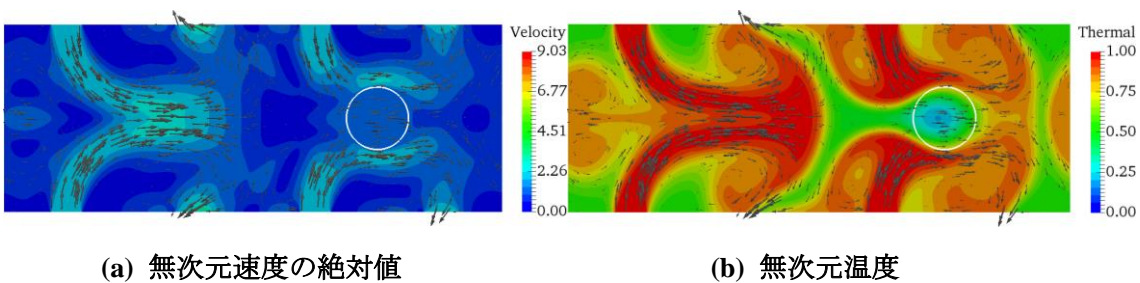
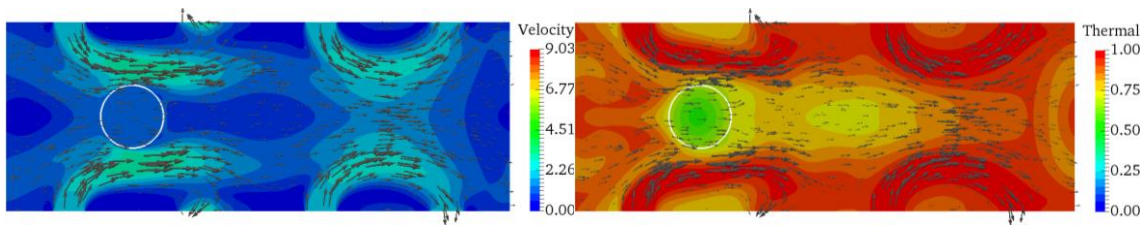


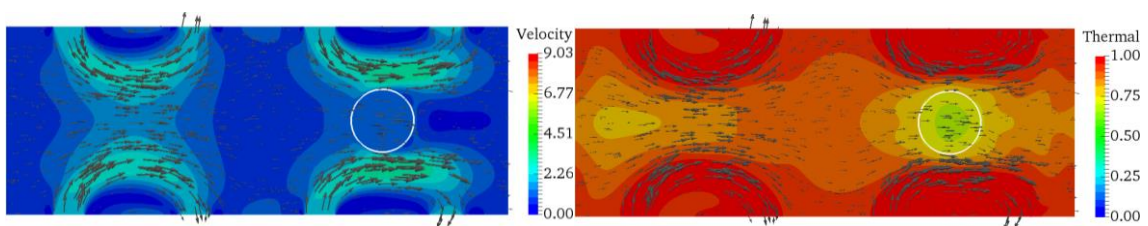
Fig. 4-5 $u_{in} = 2u_{move}$ の結果 ($\tau = 4$)



(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

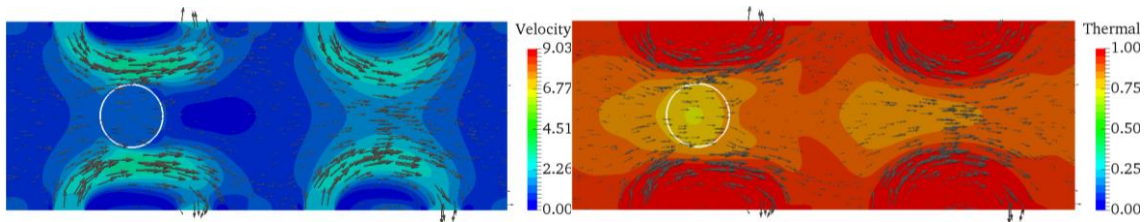
Fig. 4-6 $u_{in} = 2u_{move}$ の結果 ($\tau = 8$)



(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

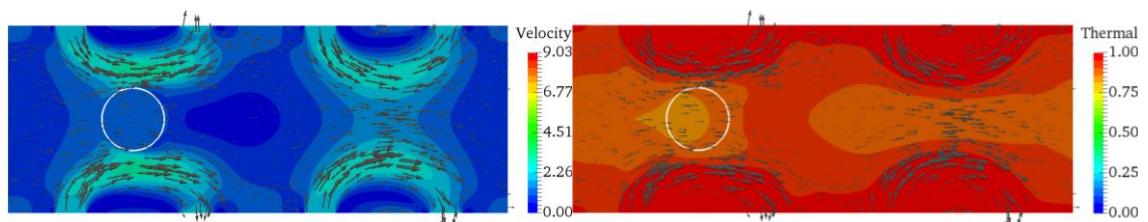
Fig. 4-7 $u_{in} = 2u_{move}$ の結果 ($\tau = 12$)



(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

Fig. 4-8 $u_{in} = 2u_{move}$ の結果 ($\tau = 16$)

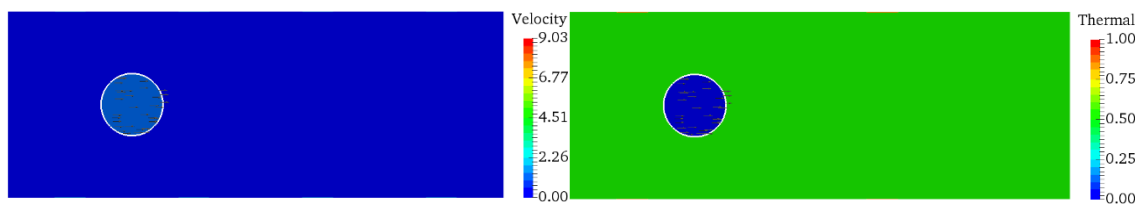


(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

Fig. 4-9 $u_{in} = 2u_{move}$ の結果 ($\tau = 24$)

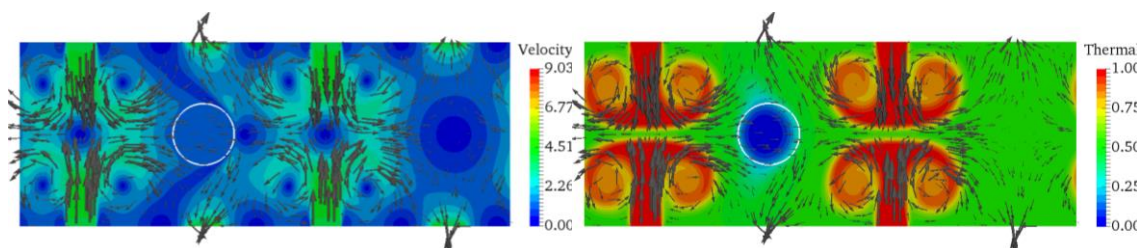
$u_{in} = 4u_{move}$ の無次元の絶対速度と無次元温度の分布を Fig.4-9 から Fig.4-15 に示す。



(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

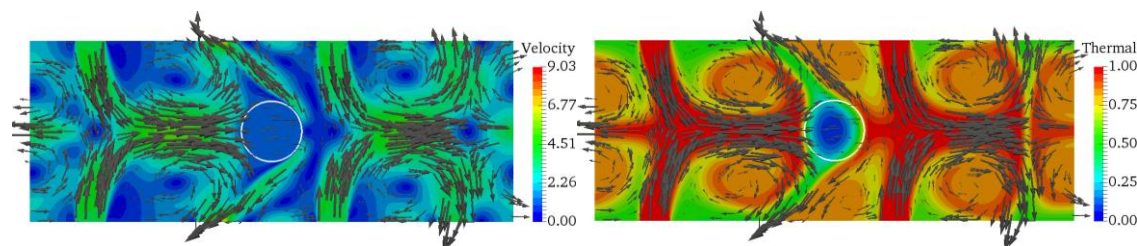
Fig. 4-10 $u_{in} = 4u_{move}$ の結果 ($\tau = 0$)



(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

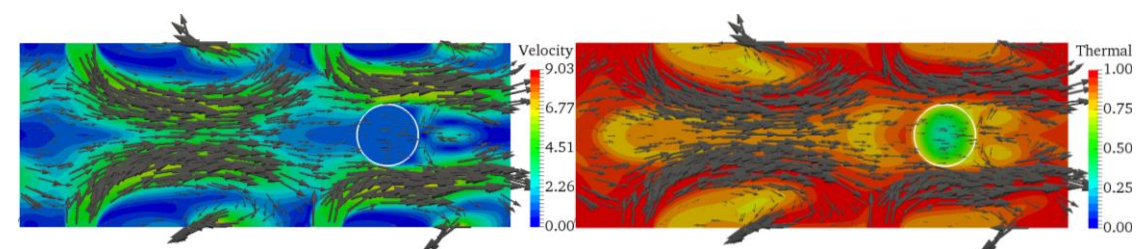
Fig. 4-11 $u_{in} = 4u_{move}$ の結果 ($\tau = 1$)



(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

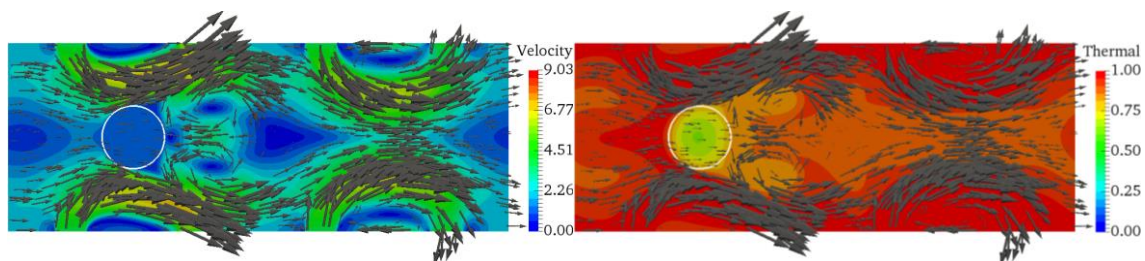
Fig. 4-12 $u_{in} = 4u_{move}$ の結果 ($\tau = 2$)



(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

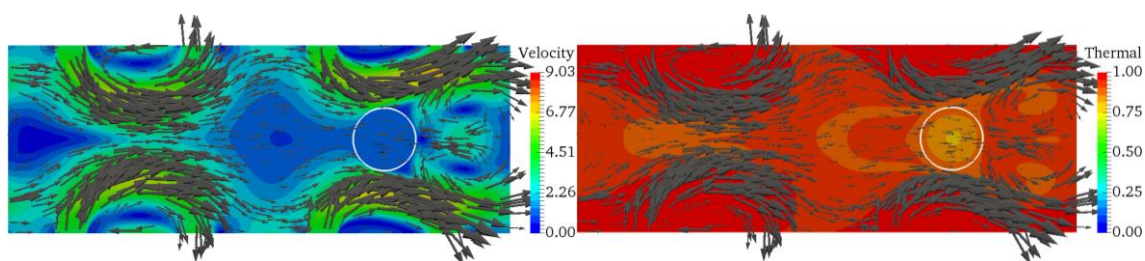
Fig. 4-13 $u_{in} = 4u_{move}$ の結果 ($\tau = 4$)



(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

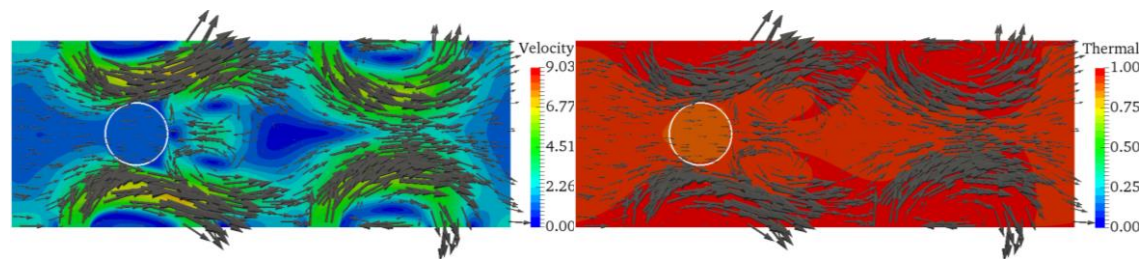
Fig. 4-14 $u_{in} = 4u_{move}$ の結果 ($\tau = 8$)



(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

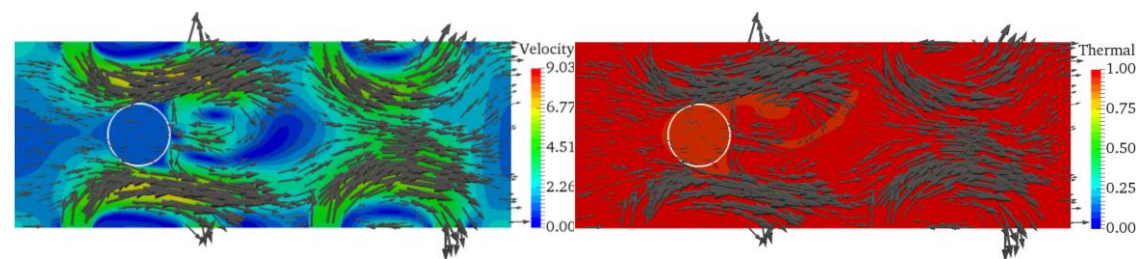
Fig. 4-15 $u_{in} = 4u_{move}$ の結果 ($\tau = 12$)



(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

Fig. 4-16 $u_{in} = 4u_{move}$ の結果 ($\tau = 16$)



(a) 無次元速度の絶対値

(b) 無次元温度

Fig. 4-17 $u_{in} = 4u_{move}$ の結果 ($\tau = 24$)

円柱が徐々に温められる様子を観察することができた． $u_{in} = 2u_{move}$ のとき円柱内の無次元最低温度は約 0.829 であり， $\tau = 24$ において， $u_{in} = 4u_{move}$ のとき円柱内の無次元最低温度は約 0.924 であった． $u_{in} = 4u_{move}$ の方が $u_{in} = 2u_{move}$ に比べて入る熱量が多く，対流も強いので，乾燥炉内の温度が早く上がり，円柱の温度も上がりやすいことがわかる．また，円柱の動きにつられて全体の流れが右向きになった．流れが円柱を通りすぎる際に加速され， $u_{in} = 2u_{move}$ で無次元最高速度は約 3.67， $u_{in} = 4u_{move}$ で無次元最高速度は約 9.03 となり，流入速度 u_{in} の 2 倍程度速くなった．そのため，ここで与えた Re に対して流れが不安定になった． $u_{in} = 2u_{move}$ で圧力修正の反復回数は安定していたが， $u_{in} = 4u_{move}$ では周期境界付近で圧力修正の反復回数が収束しにくくなった．CPU に Intel の Core i7 3930K，GPU に AMD の Radeon R9 200 series を用いて計算した場合， $u_{in} = 2u_{move}$ は約 1 時間で計算することができ， $u_{in} = 4u_{move}$ は約 50 時間かかった．格子幅と時間刻みを更に細かくする必要があると考えられるが，GPU による並列計算との相性がよく，実用的な手法であるといえる．

第5章

結言

本研究ではデカルト座標格子を用いて任意物体形状まわりの流れを精度良く計算するために、IB法を応用し距離関数を用いて壁面温度境界条件を与える手法の導入とその手法の妥当性の検証を行った。

壁面で等温加熱条件を与えた計算の妥当性検証として、平板と格子のなす角度を変更し、平板境界層流れの精度を確認した。平板と格子のなす角度が大きくなるにつれて精度が悪くなった。境界層内に格子が10格子程度用意すれば、速度と温度の分布は概ね一致することがわかった。また、壁面での速度と温度の勾配まで精度を安定させて解くためには境界層内に格子が20格子程度用意すればよいことがわかった。

物体内部の熱伝導を考慮し、対流の影響によって壁面での熱流束が異なる計算を行う手法を提案し、定性的に一致した結果を得た。

上で述べた手法を用いて、乾燥炉を模擬したモデル計算を行った。徐々に円柱が温められる様子を観測することができた。格子を十分細かくすることができれば、安定して計算することができ、実用的な手法であるといえる。

最後に今後の課題を述べる。

1. 物体内部の熱伝導を考慮した計算の定量的な評価

本研究では物体内部の熱伝導を考慮した計算の定性的な評価しか行っていないため、実験値や他の解析と定量的に比較する必要がある。

2. IB法の精度安定化

IB法の特長として物体壁面と格子のなす角度によって精度が変わる^[9]。物体壁面と格子のなす角度が大きくなっても精度が悪くならない手法を導入する必要がある。

3. AMR (Adaptive Mesh Refinement)の導入

IB法は物体壁面付近の格子を十分細かくする必要があり、計算領域全体を等間隔格子で計算することは効率が悪い。そのため、AMRを用いて物体壁面付近の格子を集中して細かくすることでメモリや計算時間を減らすことができ、効率よく計算することができる。

4. 乱流モデルの導入

自動車の塗装用乾燥炉では熱風の流入速度は10 [m/s] と大きく、自動車の大きさは4 [m] 程度あり、レールの移動速度は約0.1 [m/s] になるため、 $Re \approx 2.0 \times 10^4$ となるため、LESなどの乱流モデルを導入する必要がある。

付録 A

支配方程式の無次元化

本研究における支配方程式は以下の 3 式である.

<連続の式>

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{A.1})$$

<Navier-Stokes 方程式>

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (\text{A.2})$$

<エネルギー方程式>

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \theta = \alpha \nabla^2 \theta \quad (\text{A.3})$$

支配方程式の無次元化を示す. 以下のように無次元変数を定義する.

$$\vec{X} = \frac{\vec{x}}{x_0}, \quad \vec{U} = \frac{\vec{u}}{u_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad \Theta = \frac{\theta - \theta_{cold}}{\theta_0} \quad (\text{A.4})$$

式(A.4)を式(A.1), (A.2), (A.3)に代入し, 整理するとそれぞれ次のようになる. ここで $\vec{\nabla}$ は $\vec{\nabla}$ を無次元化したものであり, $\nabla = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y)$ と定義する.

<連続の式>

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (\text{A.5})$$

<Navier-Stokes 方程式>

$$\frac{x_0}{u_0 t_0} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{p_0}{\rho u_0^2} \nabla P + \frac{\nu}{u_0 x_0} \nabla^2 \vec{U} \quad (\text{A.6})$$

<エネルギー方程式>

$$\frac{x_0}{u_0 t_0} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \nabla) \Theta = \frac{\alpha}{\nu} \frac{\nu}{u_0 x_0} \nabla^2 \Theta \quad (\text{A.7})$$

代表速度 u_0 は計算モデルによって一様流の流入速度や物体の移動速度とする. その他の代表値は式(A.8)のように定義した.

$$x_0 = L, \quad \theta_0 = \theta_{hot} - \theta_{cold}, \quad \frac{x_0}{u_0 t_0} = 1, \quad \frac{p_0}{\rho u_0^2} = 1 \quad (\text{A.8})$$

このとき未定参照量は次のように決まる.

$$t_0 = \frac{L}{u_0}, \quad p_0 = \rho u_0^2 \quad (\text{A.9})$$

無次元数 $Re = u_0 L / \nu$, $Pr = \nu / \alpha$ を用いて無次元支配方程式は次のようになる.

<連続の式>

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (\text{A.10})$$

<Navier-Stokes 方程式>

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{U} \quad (\text{A.11})$$

<エネルギー方程式>

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \nabla) \Theta = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 \Theta \quad (\text{A.12})$$

2.7.3 節で述べた物体内の熱伝導を考慮した計算を行う際, エネルギー方程式は式(A.13)を用いる. ここで, 比熱 C は流体側では定圧比熱 C_p を用いる.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \theta = \frac{1}{\rho C} \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} \theta) \quad (\text{A.13})$$

熱伝導率 k が一定のとき, k はナブラ演算子の外に出すことができる. このとき, $\alpha = k / (\rho C)$ より, 式(A.13)は式(A.3)と等しくなる. 上で述べた無次元化に合わせて無次元変数を式(A.14)のように定義する.

$$\bar{X} = \frac{\bar{x}}{L}, \quad \bar{U} = \frac{\bar{u}}{u_0}, \quad \tau = \frac{t}{L/u_0}, \quad \Theta = \frac{\theta - \theta_{cold}}{\theta_{hot} - \theta_{cold}} \quad (\text{A.14})$$

また, 気相側の物性値を基準に取り, 無次元の密度 ρ_C , 比熱 C_C , 熱伝導率 k_C を式(A.15)のように定義する.

$$\rho_C = \frac{\rho}{\rho_G}, \quad C_C = \frac{C}{C_G}, \quad k_C = \frac{k}{k_G} \quad (\text{A.15})$$

式(A.14)と式(A.15)を式(A.13)に代入し, 整理すると次のようになる.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \nabla) \Theta = \frac{1}{\rho_C C_C} \frac{k_G}{\rho_G C_G u_0 L} \nabla \cdot (k_C \nabla \Theta) \quad (\text{A.16})$$

$Re = u_0 L / \nu_G$, $Pr = \nu_G / \alpha_G$ を用いて無次元エネルギー方程式は式(A.17)のようになる.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \nabla) \Theta = \frac{1}{\rho_C C_C Pr Re} \nabla \cdot (k_C \nabla \Theta) \quad (\text{A.17})$$

付録 B

IP 点における値の補間

ある点 IP における X 方向速度 U_{IP} の求め方について述べる．IP 点の座標 (X_{IP}, Y_{IP}) が分かっているとす．始めに，その近傍の 4 点のインデックスを求める．IP 点の左下の近傍点のインデックスを (I, J) とすると，等間隔スタガード格子において， (I, J) は式(B.1)，(B.2)で求めた (I', J') の商の整数部となる．

$$I' = \frac{X_{IP}}{\Delta X} \quad (B.1)$$

$$J' = \frac{Y_{IP} + 0.5\Delta Y}{\Delta Y} \quad (B.2)$$

プログラミング上では式(B.3)，(B.4)のように整数型に変換することで， (I, J) を得ることができる．

$$I = \text{int}\left(\frac{X_{IP}}{\Delta X}\right) \quad (B.3)$$

$$J = \text{int}\left(\frac{Y_{IP} + 0.5\Delta Y}{\Delta Y}\right) \quad (B.4)$$

例えば， $(X_{IP}, Y_{IP}) = (1.08, 2.16)$ ， $\Delta X = \Delta Y = 0.1$ のとき， $(I, J) = (10, 22)$ となる． (I, J) が求まれば， $(I+1, J)$ ， $(I, J+1)$ ， $(I+1, J+1)$ が残りの近傍点のインデックスとなる．Fig. B-1 のように ΔX_{IP} ， ΔY_{IP} をとると，それぞれ式(B.5)，(B.6)のように求まる．

$$\Delta X_{IP} = X_{IP} - I\Delta X \quad (B.5)$$

$$\Delta Y_{IP} = Y_{IP} - (J - 0.5)\Delta Y \quad (B.6)$$

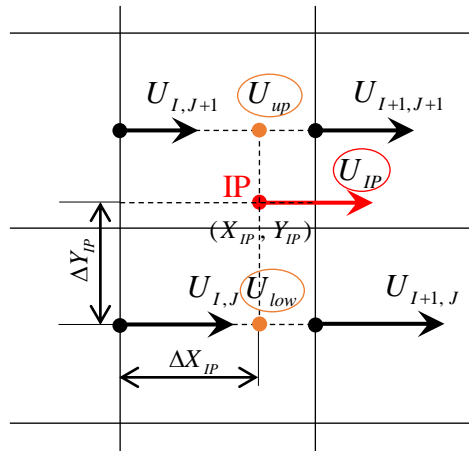


Fig. B- 1 IP 点での補間

IP 点の上方, 下方の点における X 方向速度をそれぞれ U_{up} , U_{low} とし, 線形補間によって式 (B.7), (B.8) のように求める.

$$U_{up} = \frac{\Delta X_{IP} U_{I+1, J+1} + (\Delta X - \Delta X_{IP}) U_{I, J+1}}{\Delta X} \quad (\text{B.7})$$

$$U_{low} = \frac{\Delta X_{IP} U_{I+1, J} + (\Delta X - \Delta X_{IP}) U_{I, J}}{\Delta X} \quad (\text{B.8})$$

U_{up} , U_{low} を用いて, U_{IP} を式 (B.9) のように線形補間して求める.

$$U_{IP} = \frac{\Delta Y_{IP} U_{up} + (\Delta Y - \Delta Y_{IP}) U_{low}}{\Delta Y} \quad (\text{B.9})$$

IP 点における Y 方向速度 V_{IP} を求めるときは V の定義点の位置に合わせて式 (B.3), (B.4) は式 (B.10), (B.11) のようになる.

$$I = \text{int} \left(\frac{X_{IP} + 0.5 \Delta X}{\Delta X} \right) \quad (\text{B.10})$$

$$J = \text{int} \left(\frac{Y_{IP}}{\Delta Y} \right) \quad (\text{B.11})$$

また, 式 (B.5), (B.6) も式 (B.12), (B.13) のようになる.

$$\Delta X_{IP} = X_{IP} - (I - 0.5) \Delta X \quad (\text{B.12})$$

$$\Delta Y_{IP} = Y_{IP} - J \Delta Y \quad (\text{B.13})$$

その後の操作は U_{IP} を求めるときと同様である. 温度などのセル中心で定義される値についても定義点の位置に合わせて I , J , ΔX_{IP} , ΔY_{IP} を求めることで, IP 点での値を補間することができる.

付録 C

境界条件の離散化

3.1 節の式(3.2)と式(3.3)で示した右壁と上面の境界条件の離散化について述べる．式(3.2)と式(3.3)を無次元化すると式(C.1)と式(C.2)のようになる．ここで， S と N は無次元の接線方向座標と法線方向座標であり， $S = s/L$ ， $N = n/L$ と定義する．

$$\text{右面：} \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial S} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial S} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\text{上面：} \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial N} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial N} = 0 \quad (\text{C.2})$$

$f = (U, V, \Theta)$ に対して $\partial f / \partial S$ は式(C.3)のように表すことができる．

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial S} \quad (\text{C.3})$$

$\partial X / \partial S = \cos \psi$ ， $\partial Y / \partial S = \sin \psi$ より，式(C.3)は式(C.4)のようになる．

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \cos \psi \frac{\partial f}{\partial X} + \sin \psi \frac{\partial f}{\partial Y} \quad (\text{C.4})$$

$\partial f / \partial X$ と $\partial f / \partial Y$ を離散化して求めれば $\partial f / \partial S$ の値を得ることができるが，右面の境界条件において， $\partial f / \partial Y$ を離散化することができない．そのため，Fig.C-1 の Y' 方向の勾配と X 方向の勾配を用いて $\partial f / \partial S$ を得る． $\partial f / \partial Y'$ は式(C.5)のように表すことができる．

$$\frac{\partial f}{\partial Y'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial Y} \quad (\text{C.5})$$

また，式(C.4)と式(C.5)より，式(C.6)を得ることができる．

$$\frac{\partial f}{\partial S} = (\cos \psi - \sin \psi) \frac{\partial f}{\partial X} + \sqrt{2} \sin \psi \frac{\partial f}{\partial Y'} \quad (\text{C.6})$$

$\partial f / \partial X$ と $\partial f / \partial Y'$ を 1 次精度の片側差分法を用いて求めると $\partial f / \partial S$ は式(C.7)のように表すことができる．ここで， $\Delta X = \Delta Y$ とする．

$$\frac{\partial f}{\partial S} = (\cos \psi - \sin \psi) \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta X} + \sqrt{2} \sin \psi \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j-1}}{\sqrt{2} \Delta X} \quad (\text{C.7})$$

仮想格子内の値 $f_{i,j}$ に $\partial f / \partial S = 0$ となるように値を与えることで境界条件を与えることができる．つまり，式(C.7)に $\partial f / \partial S = 0$ を代入し，整理すると右面の境界条件は式(C.8)のようになる．

$$f_{i,j} = \frac{(\cos \psi - \sin \psi) f_{i-1,j} + \sin \psi f_{i-1,j-1}}{\cos \psi} \quad (\text{C.8})$$

また、 $\partial f/\partial N$ は式(C.9)のように表すことができる。

$$\frac{\partial f}{\partial N} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial N} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial N} \quad (\text{C.9})$$

$\partial X/\partial N = -\sin\psi$ ， $\partial Y/\partial N = \cos\psi$ より，式(C.9)は式(C.10)のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial N} = -\sin\psi \frac{\partial f}{\partial X} + \cos\psi \frac{\partial f}{\partial Y} \quad (\text{C.10})$$

$\partial f/\partial X$ と $\partial f/\partial Y$ を離散化して求めれば $\partial f/\partial N$ の値を得ることができるが，上面の境界条件において， $\partial f/\partial X$ を離散化することができない．そのため，Fig.C-1 の X' 方向の勾配と Y 方向の勾配を用いて $\partial f/\partial N$ を得る． $\partial f/\partial X'$ は式(C.11)のように表すことができる．

$$\frac{\partial f}{\partial X'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial Y} \quad (\text{C.11})$$

また，式(C.10)と式(C.11)より，式(C.12)を得ることができる。

$$\frac{\partial f}{\partial N} = (\cos\psi - \sin\psi) \frac{\partial f}{\partial Y} + \sqrt{2} \sin\psi \frac{\partial f}{\partial X'} \quad (\text{C.12})$$

$\partial f/\partial Y$ と $\partial f/\partial X'$ を 1 次精度の片側差分法を用いて求めると $\partial f/\partial N$ は式(C.7)のように表すことができる．ここで， $\Delta X = \Delta Y$ とする．

$$\frac{\partial f}{\partial N} = (\cos\psi - \sin\psi) \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta X} + \sqrt{2} \sin\psi \frac{f_{i,j} - f_{i+1,j-1}}{\sqrt{2}\Delta X} \quad (\text{C.13})$$

仮想格子内の値 $f_{i,j}$ に $\partial f/\partial N = 0$ となるように値を与えることで境界条件を与えることができる．つまり，式(C.13)に $\partial f/\partial N = 0$ を代入し，整理すると上面の境界条件は式(C.14)のようになる．

$$f_{i,j} = \frac{(\cos\psi - \sin\psi) f_{i,j-1} + \sin\psi f_{i+1,j-1}}{\cos\psi} \quad (\text{C.14})$$

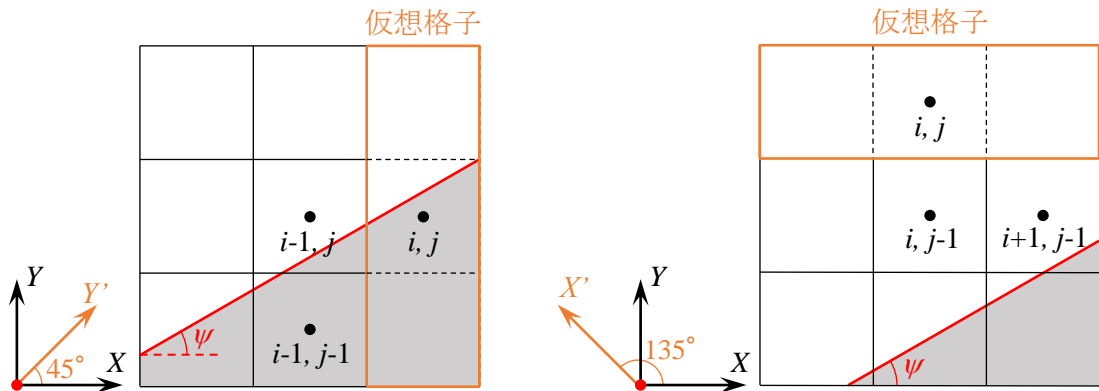


Fig. C-1 離散化の参照点 (左：右面，右：上面)

付録 D

Runge-Kutta 法を用いた Blasius 方程式の解法

3.1 節の比較に用いた値の求め方について述べる．ここで，一様流と平板は x 軸に平行であり，平板の先端を原点とする．式(D.1)に示す平板境界層方程式は $\eta = y\sqrt{u_{in}/(x\nu)}$ の関数 $F(\eta)$ を用いて式(D.2)のように変形することができる^[22]． $F(\eta)$ は式(D.3)のように定義され， $F'(\eta) = U = u/u_{in}$ となる．

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{D.1})$$

$$2F''' + FF'' = 0 \quad (\text{D.2})$$

$$F(\eta) = \int_0^\eta \frac{u}{u_{in}} d\eta \quad (\text{D.3})$$

同様にして，式(D.4)に示す温度境界層方程式は無次元温度 $\Theta(\eta)$ を用いて，式(D.5)のように変形することができる^[24]．

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (\text{D.4})$$

$$2\Theta'' + PrF\Theta' = 0 \quad (\text{D.5})$$

ここでは Prandtl 数 $Pr = 0.7$ とする．また，境界条件は式(D.6)，式(D.7)の通りである．

$$F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1 \quad (\text{D.6})$$

$$\Theta(0) = 1, \quad \Theta(\infty) = 0 \quad (\text{D.7})$$

4 次精度の Runge-Kutta 法は式(D.8)から式(D.12)のように求めることができる．Runge-Kutta 法を用いて式(D.2)と式(D.5)の解を求めるためには $F''(0)$ と $\Theta'(0)$ の値が必要である． $F''(0)$ は Howarth によって求められた $F''(0) = 0.33206$ ^[22]を用いる． $\Theta'(0)$ においては式(D.11)から $\Theta(\infty)$ が 0 になるように試行的に求め， $\Theta'(0) = -0.29268$ となった．このとき $\eta = 50$ を無限遠方とする．

$$F(\eta + \Delta\eta) = F(\eta) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{D.8})$$

$$F'(\eta + \Delta\eta) = F'(\eta) + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad (\text{D.9})$$

$$F''(\eta + \Delta\eta) = F''(\eta) + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \quad (\text{D.10})$$

$$\Theta(\eta + \Delta\eta) = \Theta(\eta) + \frac{1}{6}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4) \quad (\text{D.11})$$

$$\Theta'(\eta + \Delta\eta) = \Theta'(\eta) + \frac{1}{6}(d_1 + 2d_2 + 2d_3 + d_4) \quad (\text{D.12})$$

k_i, l_i, m_i, c_i, d_i ($i=1, 2, 3, 4$) はそれぞれ添え字 $i=1$ から順に以下の式で解き、式(D.8)から式(D.12)に代入する.

$$i=1 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 = (\Delta\eta) F'(\eta) \\ l_1 = (\Delta\eta) F''(\eta) \\ m_1 = (\Delta\eta) F'''(\eta) = -\frac{1}{2}(\Delta\eta) F(\eta) F''(\eta) \quad (\because \text{Eq. (D.2)}) \\ c_1 = (\Delta\eta) \Theta'(\eta) \\ d_1 = (\Delta\eta) \Theta''(\eta) = -\frac{1}{2}(\Delta\eta) Pr F(\eta) \Theta'(\eta) \quad (\because \text{Eq. (D.5)}) \end{array} \right. \quad (\text{D.13})$$

$$i=2 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_2 = (\Delta\eta) \{F'(\eta) + 0.5l_1\} \\ l_2 = (\Delta\eta) \{F''(\eta) + 0.5m_1\} \\ m_2 = -\frac{1}{2}(\Delta\eta) \{F(\eta) + 0.5k_1\} \{F''(\eta) + 0.5m_1\} \quad (\because \text{Eq. (D.2)}) \\ c_2 = (\Delta\eta) \{\Theta'(\eta) + 0.5d_1\} \\ d_2 = -\frac{1}{2}(\Delta\eta) Pr \{F(\eta) + 0.5k_1\} \{\Theta'(\eta) + 0.5d_1\} \quad (\because \text{Eq. (D.5)}) \end{array} \right. \quad (\text{D.14})$$

$$i=3 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_3 = (\Delta\eta) \{F'(\eta) + 0.5l_2\} \\ l_3 = (\Delta\eta) \{F''(\eta) + 0.5m_2\} \\ m_3 = -\frac{1}{2}(\Delta\eta) \{F(\eta) + 0.5k_2\} \{F''(\eta) + 0.5m_2\} \quad (\because \text{Eq. (D.2)}) \\ c_3 = (\Delta\eta) \{\Theta'(\eta) + 0.5d_2\} \\ d_3 = -\frac{1}{2}(\Delta\eta) Pr \{F(\eta) + 0.5k_2\} \{\Theta'(\eta) + 0.5d_2\} \quad (\because \text{Eq. (D.5)}) \end{array} \right. \quad (\text{D.15})$$

$$i=4 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_4 = (\Delta\eta) \{F'(\eta) + l_3\} \\ l_4 = (\Delta\eta) \{F''(\eta) + m_3\} \\ m_4 = -\frac{1}{2}(\Delta\eta) \{F(\eta) + k_3\} \{F''(\eta) + m_3\} \quad (\because \text{Eq. (D.2)}) \\ c_4 = (\Delta\eta) \{\Theta'(\eta) + d_3\} \\ d_4 = -\frac{1}{2}(\Delta\eta) Pr \{F(\eta) + k_3\} \{\Theta'(\eta) + d_3\} \quad (\because \text{Eq. (D.5)}) \end{array} \right. \quad (\text{D.16})$$

$\eta = 0$ から $\Delta\eta$ ずつ解いていき、 $\eta = 50$ まで計算する。ここで、 $\Delta\eta = 0.1$ とした。求めた速度の解とHowarth による解^[19]の比較を Table D-1 に示す。この結果から本計算が十分一致していることがわかる。温度についても同様にして解いているため、精度が確保されていると考えられる。

Table D-1 計算結果と比較

η	$F(\eta)$		$F'(\eta) = U$		$F''(\eta)$	
	Howarth	Present	Howarth	Present	Howarth	Present
0	0	0	0	0	0.33206	0.33206
1	0.16557	0.16557	0.32979	0.32978	0.32301	0.32301
2	0.65003	0.65003	0.62977	0.62977	0.26675	0.26675
5	3.28329	3.28330	0.99155	0.99155	0.01591	0.01591
8	6.27923	6.27925	1.00000	1.00000	0.00001	0.00001
50		48.2795		1.00001		0.00000

無次元 Y 方向速度 V は式(D.16)から求めることができる^[20]。ここで、 Re_x は局所 Reynolds 数であり、式(D.17)のように定義する。

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Re_x}} (\eta F' - F) \quad (D.16)$$

$$Re_x = \frac{u_{in} x}{\nu} \quad (D.17)$$

また、 η は式(D.18)のように変形することができる。

$$\eta = Y \sqrt{\frac{Re}{X}} \quad (D.18)$$

3.1 節において $Re = 1.0 \times 10^4$ であるため、 $x = L$ において Y と η は式(D.19)のような関係を持つ。

$$Y = \frac{\eta}{100} \quad (D.19)$$

ここでの X 、 Y はそれぞれ 3.1 節の S 、 N に対応するため、ここで求めた速度と温度の分布は Fig.3-2 から Fig.3-4 に黒の点線で示したようになる。

付録 E

$\partial U_s / \partial N$ と Nu の求め方

3.1 節で評価に用いた無次元接線方向速度の無次元法線方向勾配 $\partial U_s / \partial N$ と局所ヌセルト数 Nu の求め方について述べる． Nu は局所熱伝達率 h_s ，熱伝導率 k ，接線方向座標 s を用いて式(E.1)のように定義され，壁面上で熱伝導のみの熱伝導に比べ，対流によって何倍の熱を伝えたかを表す値である^[25]．ここで， h_s は式(E.2)のように表すことができる．

$$Nu = \frac{h_s s}{k} \quad (\text{E.1})$$

$$h_s = -\frac{k}{\theta_{hot} - \theta_{cold}} \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_B \quad (\text{E.2})$$

Nu は本研究で用いた無次元化に合わせると式(E.3)のように変形される．3.1 節で求める Nu はすべて $S=1$ であり，壁面での無次元温度の無次元法線方向勾配 $\partial \Theta / \partial N \Big|_B$ を求めればよい．

$$Nu = -S \frac{\partial \Theta}{\partial N} \Big|_B \quad (\text{E.3})$$

$f = (U_s, \Theta)$ とする．Fig.E-1 のように参照点を取り，式(E.4)に示したように 2 次精度の前進差分法によって壁面の $\partial f / \partial N \Big|_B$ を計算することができる．

$$\frac{\partial f}{\partial N} \Big|_B = -\frac{3f_B - 4f_1 + f_2}{2\Delta N} \quad (\text{E.4})$$

ここで， U_s は 2.6.2 節で述べた変換と同様にして， X 方向速度 U と Y 方向速度 V を用いて式(E.5)から求めることができる．

$$U_s = US_X + VS_Y \quad (\text{E.5})$$

また， f_B は $f_B = (0, 1)$ であり， f_1 と f_2 は付録 B で述べた補間と同様にして求める．本研究では $\Delta X = 5.0 \times 10^{-3}$ ， 2.5×10^{-3} ， 1.25×10^{-3} において $\Delta N = 7.5 \times 10^{-3}$ とし， $\Delta X = 1.0 \times 10^{-2}$ において $\Delta N = 1.5 \times 10^{-2}$ とした．

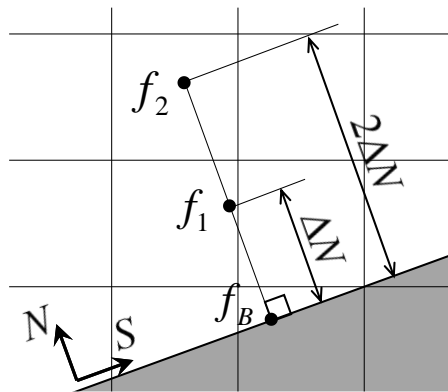


Fig. E-1 離散化の参照点

付録 D で求めた $F''(0)=0.33206$ と $\Theta'(0)=-0.29268$ を $\partial U_s/\partial N|_B$ と Nu に変換する方法を示す. 付録 D の X , Y はそれぞれここでの S , N に等しく, 式(D.18)から $S=1$ のとき $\partial/\partial\eta$ は式(E.6)のように表すことができる.

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial}{\partial N} \quad (\text{E.6})$$

式(E.6)から $S=1$ における $\partial U_s/\partial N|_B$, Nu はそれぞれ式(E.7), 式(E.8)のように表すことができる.

$$\left. \frac{\partial U_s}{\partial N} \right|_B = \sqrt{Re} \left. \frac{\partial U_s}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \sqrt{Re} F''(0) \quad (\text{E.7})$$

$$Nu = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial N} \right|_B = - \sqrt{Re} \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = - \sqrt{Re} \Theta'(0) \quad (\text{E.8})$$

3.1 節で $Re=1.0 \times 10^4$ であるため, 比較に用いた $\partial U_s/\partial N|_B$, Nu はそれぞれ $\partial U_s/\partial N|_B \simeq 33.21$, $Nu \simeq 29.27$ となる.

付録 F

平板境界層計算の可視化結果

参考のために 3.1 節で計算した平板境界層流れの計算領域全体の可視化結果を Fig.F-1 から Fig.F-8 に示す． Fig.F-1 と Fig.F-2 は $\Delta X = 1.0 \times 10^{-2}$ （代表長さに 100 格子）における無次元絶対速度と無次元温度であり， Fig.F-3 と Fig.F-4， Fig.F-5 と Fig.F-6， Fig.F-7 と Fig.F-8 はそれぞれ $\Delta X = 5.0 \times 10^{-3}$ （代表長さに 200 格子）， 2.5×10^{-3} （代表長さに 400 格子）， 1.25×10^{-3} （代表長さに 800 格子）における無次元絶対速度と無次元温度をある． 図中に平板の壁面を白線で表す．

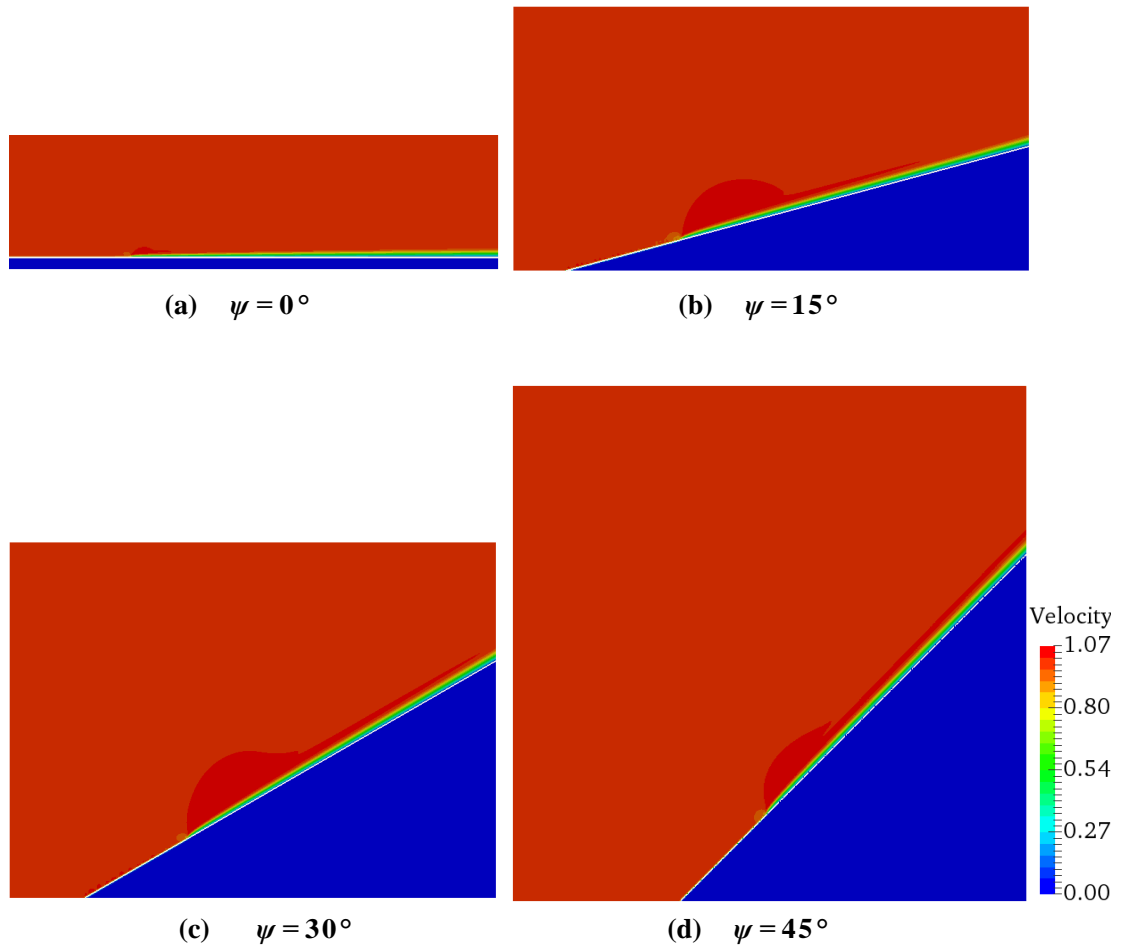


Fig. F-1 $\Delta X = 1.0 \times 10^{-2}$ (速度)

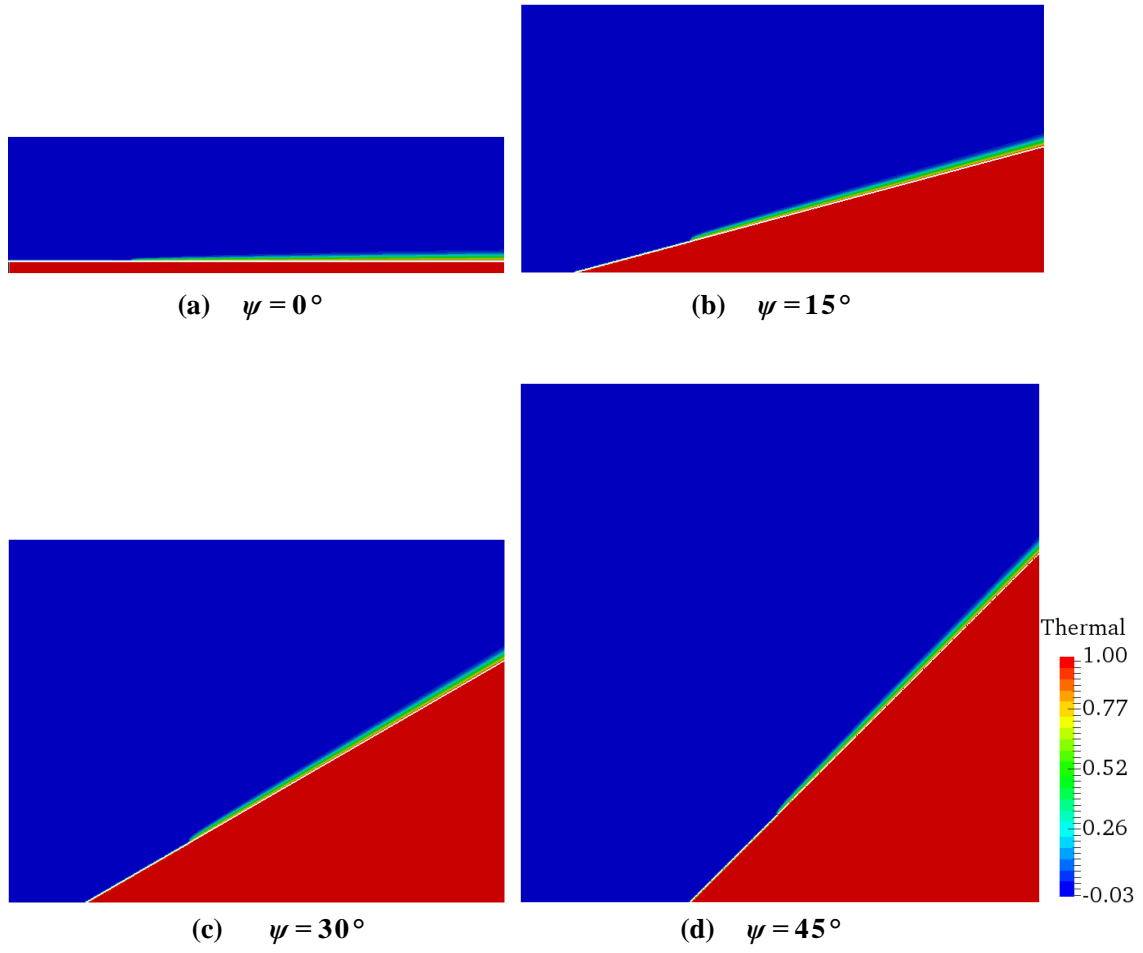
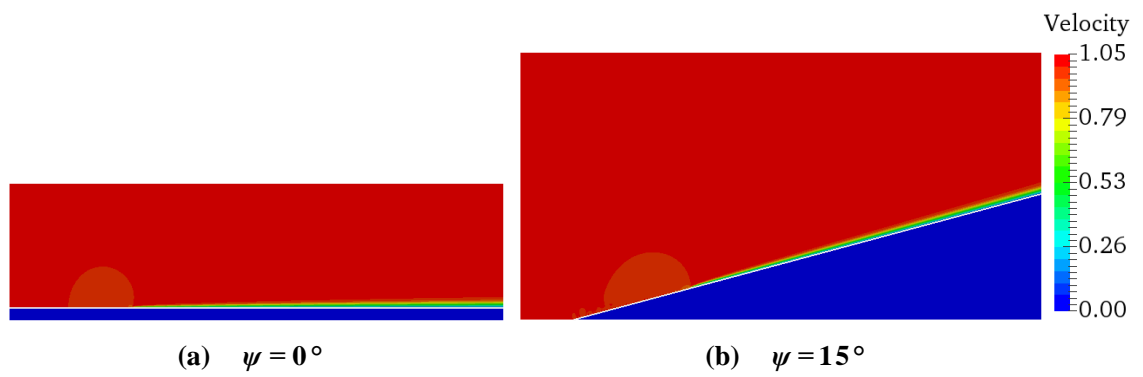


Fig. F-2 $\Delta X = 1.0 \times 10^{-2}$ (温度)



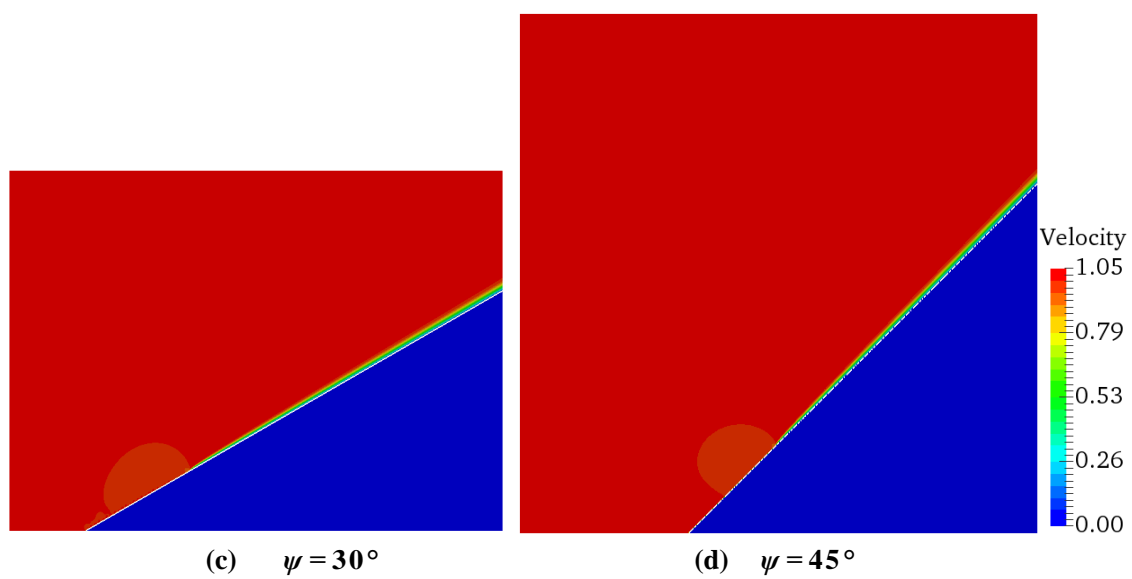


Fig. F-3 $\Delta X = 5.0 \times 10^{-3}$ (速度)

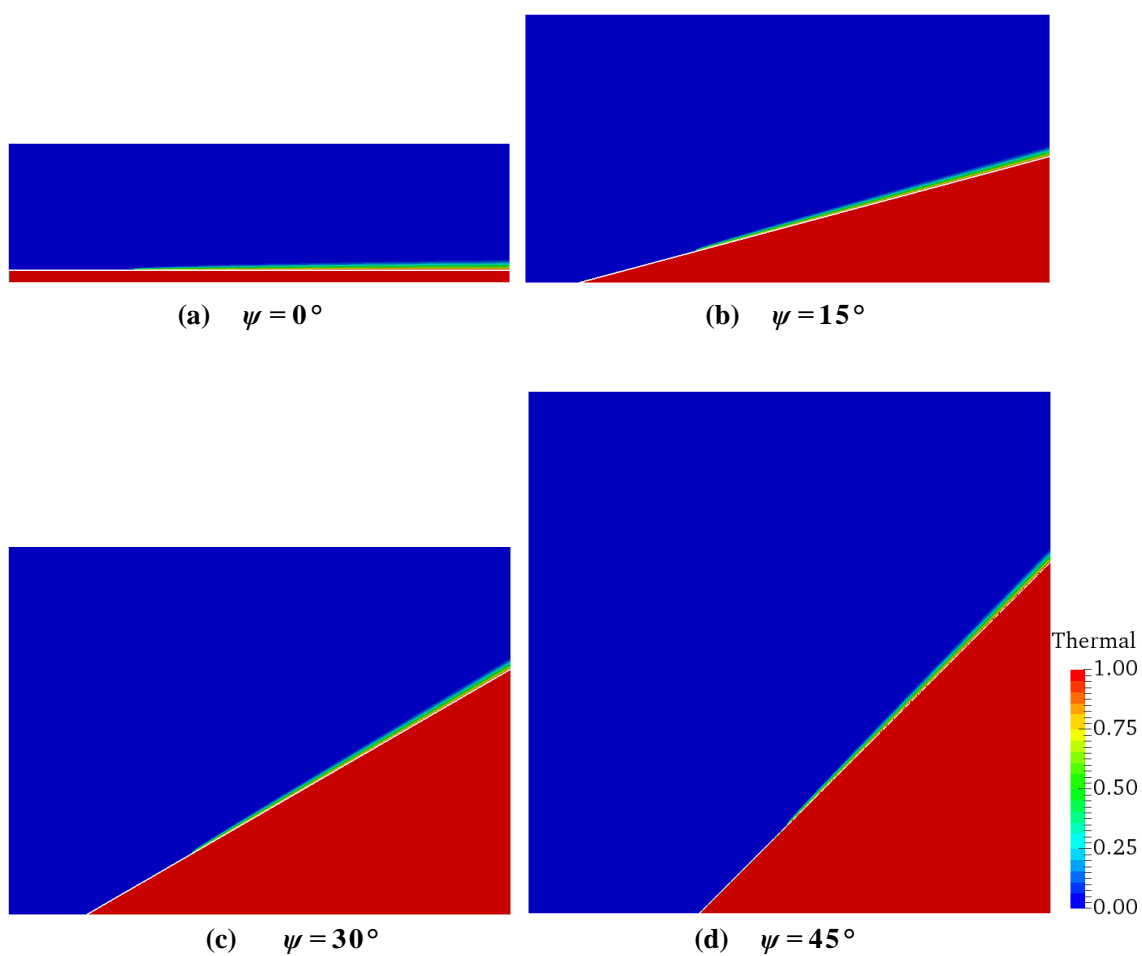


Fig. F-4 $\Delta X = 5.0 \times 10^{-3}$ (温度)

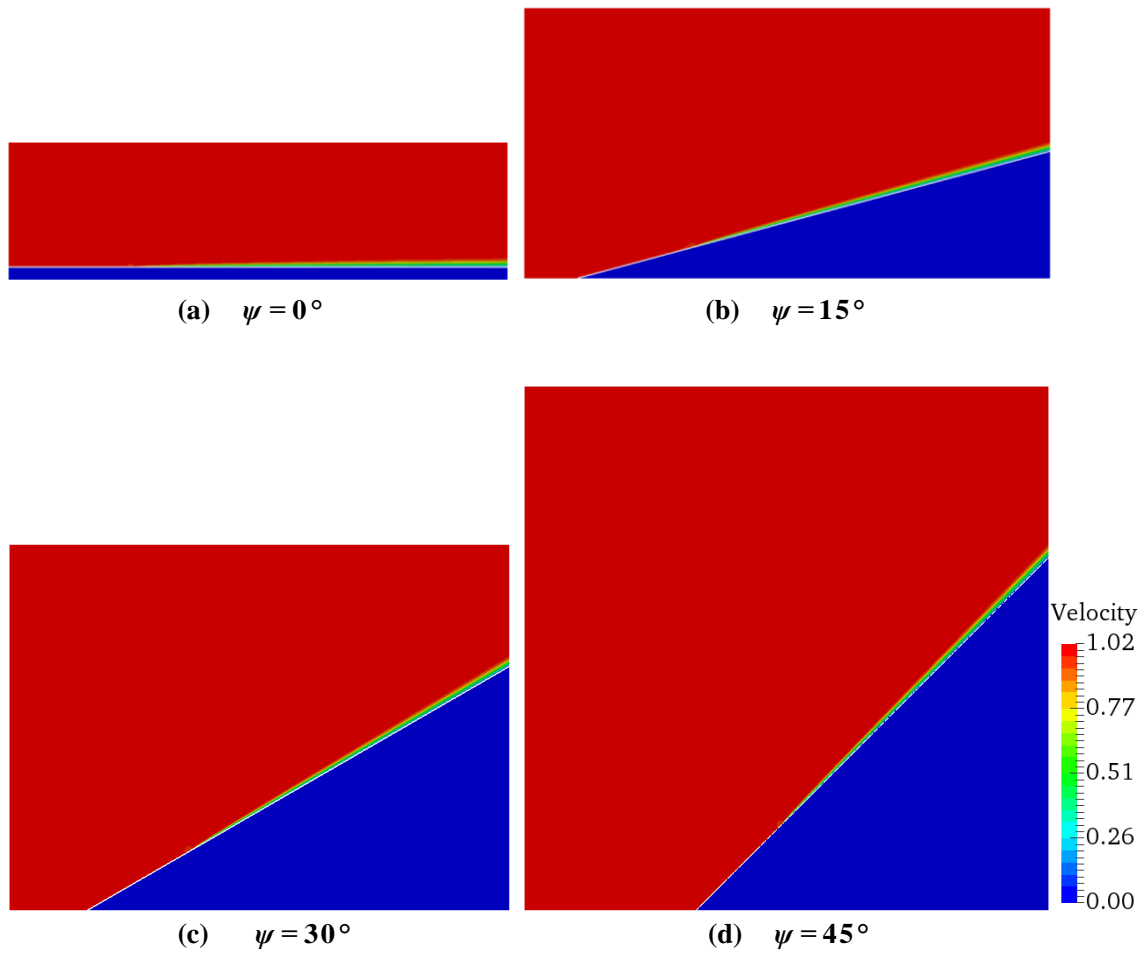
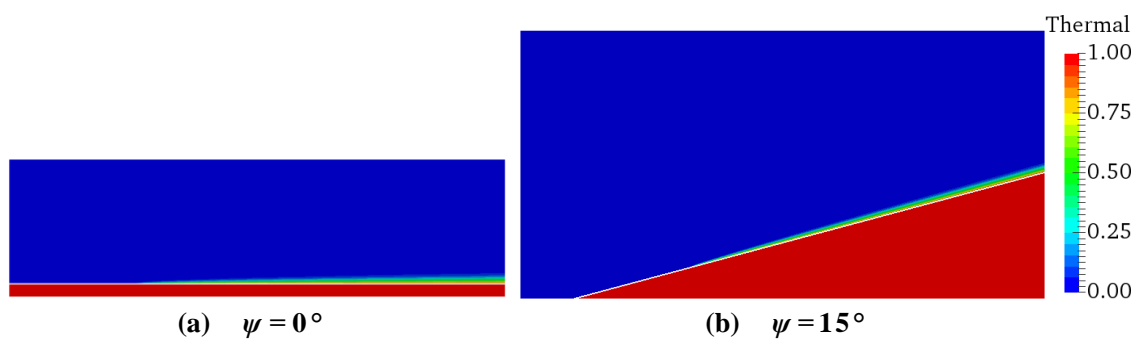


Fig. F-5 $\Delta X = 2.5 \times 10^{-3}$ (速度)



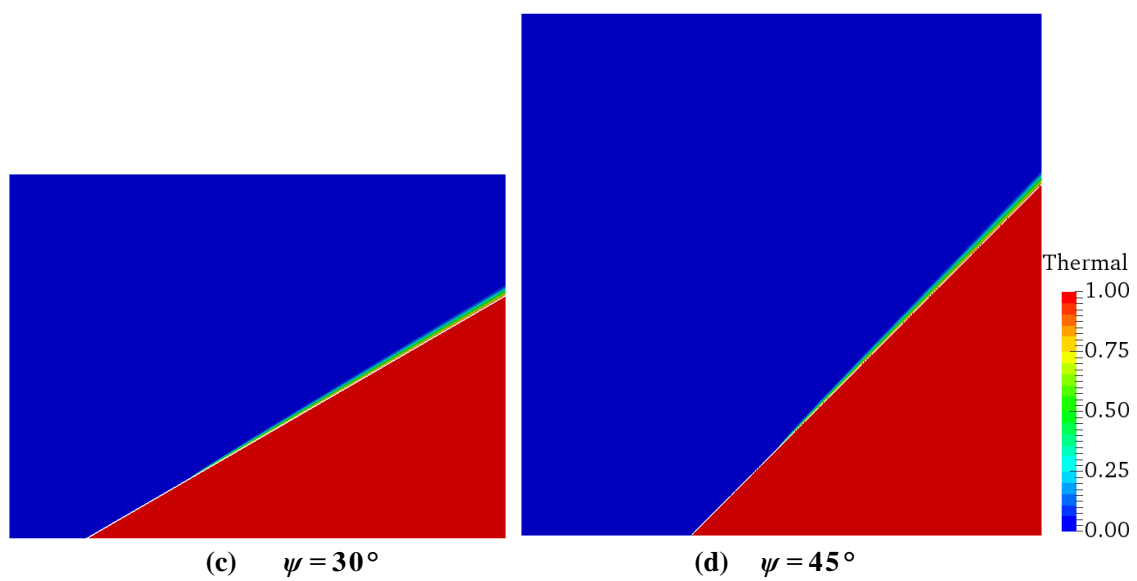


Fig. F-6 $\Delta X = 2.5 \times 10^{-3}$ (温度)

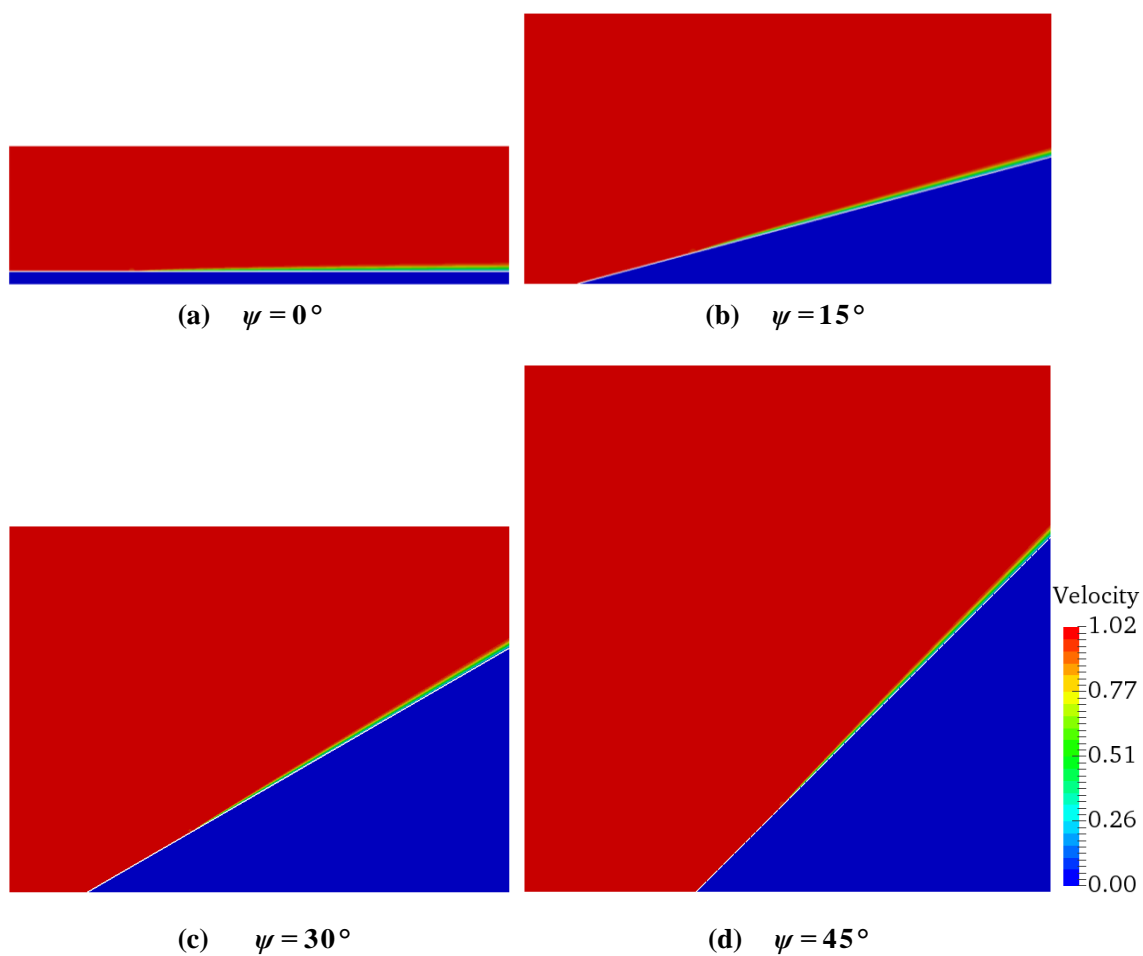


Fig. F-7 $\Delta X = 1.25 \times 10^{-3}$ (速度)

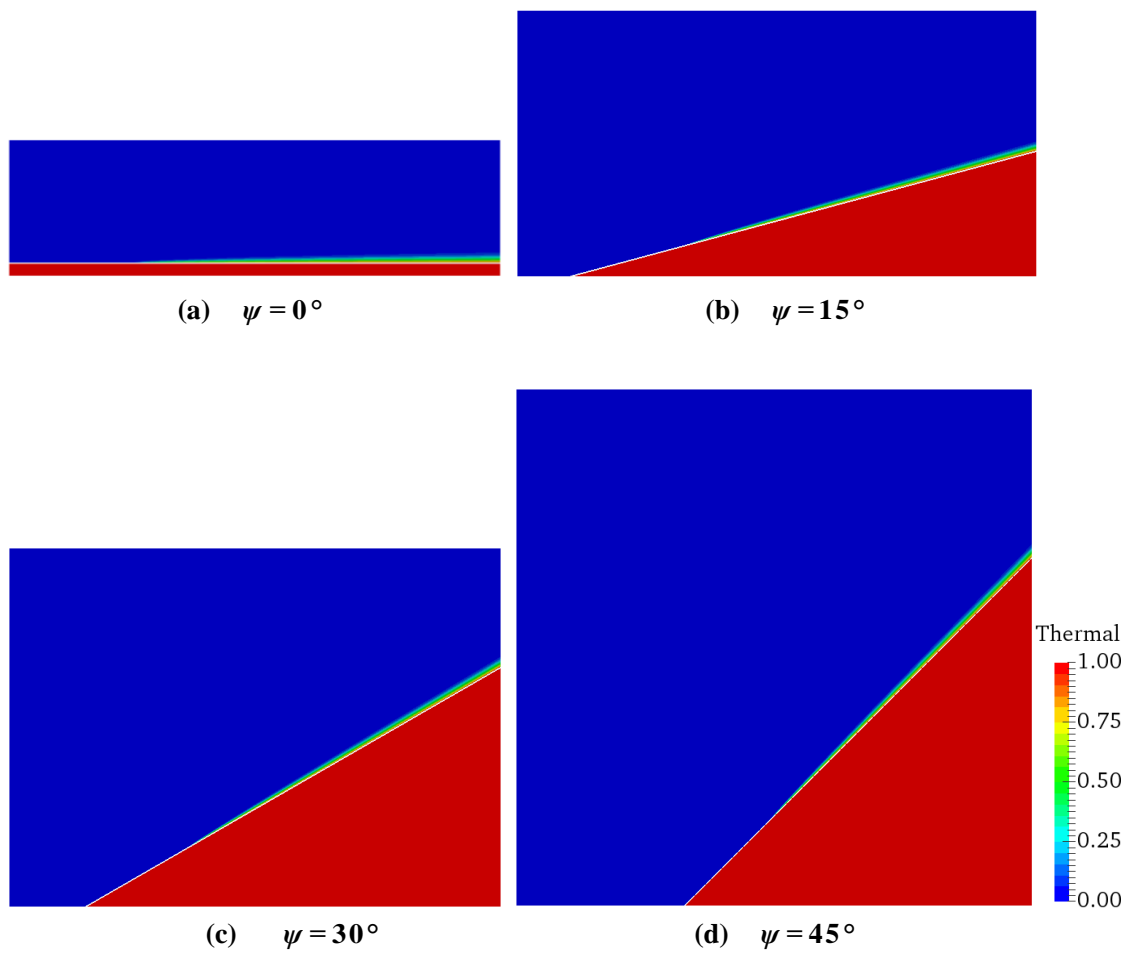


Fig. F-8 $\Delta X = 1.25 \times 10^{-3}$ (温度)

参考文献

- [1] 小林敏雄, 他, 数値流体力学ハンドブック, 丸善株式会社, (2003), pp. i - ii
- [2] 小林敏雄, 他, 数値流体力学ハンドブック, 丸善株式会社, (2003), pp.387-388
- [3] 原田基至, 玉木義治, 高橋悠一, 今村太郎, 直交格子法における埋め込み境界法と Cut-Cell 法の比較-壁関数を用いた乱流解析-, 第 29 回数値流体力学シンポジウム, B07-1, (2015)
- [4] 高橋悠一, 今村太郎, 直交格子法を用いた熱誠計算における力計算と物体壁面境界の取り扱いについて, 第 26 回数値流体力学シンポジウム, E04-3, (2012)
- [5] 佐藤智光, Level Set 法を用いた IB 法による非圧縮性流れの数値解析, 首都大学東京大学院 修士論文(2011)
- [6] 伊藤和憲, 密度埋め込み型 IB 法を用いた流体・物体連星問題の解析手法の開発, 首都大学東京 卒業論文(2016)
- [7] Jianming Yang, Frederick Stern, A non-interactive direct forcing immersed boundary method for strongly-coupled fluid-solid interactions, Journal of Computational Physics vol.295 (2015) pp.779-804
- [8] 佐藤範和, 梶島岳夫, 竹内伸太郎, 稲垣昌英, 堀之内成明, 直交格子法における物体境界近傍の直接離散化法(速度場と圧力場の整合性を考慮した高精度化), 日本機械学会論文集 (B 編) 79 巻 800 号(2013)
- [9] 佐藤範和, 竹内伸太郎, 梶島岳夫, 稲垣昌英, 堀之内成明, 直交格子を用いた対流熱伝達計算における物体境界近傍の直接離散化法, 日本機械学会論文集 (B 編) 79 巻 803 号(2013)
- [10] Jeong Chul Song, Joon Ahn, Joon Sik Lee, An immersed-boundary method for conjugate heat transfer analysis, Journal of Mechanical Science and Technology vol.31 Issue 5 (2017) pp.2287-2294
- [11] Tzyy-Lng Hong, Po-When Hsieh, Suh-Yuh Yang, Cheng-Shu You, A simple direct-forcing immersed boundary projection method with prediction-correction for fluid-solid interaction problem
- [12] Dedy Zulhidayat Noor, Ming-Jhy Chern, Tzyy-Leng Horng, An immersed boundary method to solve fluid-solid interaction problem, Computational Mechanics (2009) vol. 44 pp.447-453
- [13] Takeo Kajishima, Satoshi Takiguti, Hiroyuki Hamasaki, Yutaka Miyake, Turbulence Structure of Particle-Laden Flow in a Vertical Plane Channel Due to Vortex Shedding, JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering (2001) vol.44 Issue 4 pp.526-535

- [14] 小林敏雄, 他, 数値流体力学ハンドブック, 丸善株式会社, (2003), pp.512-516
- [15] 毛利昌康, 株式会社ディライト 電着塗装シミュレーション技術, URL:<http://ipconet.org/seminar/2014kyusyu/paper%205.pdf>, 2015/1/23, pp.44-53,
- [16] 伊藤忠テクノソリューションズの科学・工学系情報サイト engineering-eye 焼付乾燥塗装解析モジュール (Oven), URL: <http://www.engineering-eye.com/THESEUS-FE/function/index.html>, 2015/1/23
- [17] 平野博之, 流れの数値計算と可視化 第2版, 丸善株式会社, (2004), pp.164
- [18] 平野博之, 流れの数値計算と可視化 第2版, 丸善株式会社, (2004), pp.156-159
- [19] 安西洋平, GPU による混相流数値解析法の開発, 首都大学東京大学院 修士論文 (2015), pp.12
- [20] 安西洋平, GPU による混相流数値解析法の開発, 首都大学東京大学院 修士論文 (2015), pp.19-20
- [21] 關輝彦, $A-\phi$ 法による電磁浮遊技術を利用した表面張力測定法の数値解析, 首都大学東京大学院 修士論文(2017), pp.73-76
- [22] 豊倉富太郎, 亀本喬司, 流体力学, 実教出版株式会社, (1976), pp.209-213
- [23] 日本機械学会, 有信睦弘, 伝熱工学資料 改訂第5版, 丸善株式会社, (2009), pp.295-296
- [24] Joseph A. Schetz, "Boundary Layer Analysis", Present Hall, (1993), pp.81-89
- [25] 日本機械学会, 有信睦弘, 伝熱工学資料 改訂第5版, 丸善株式会社, (2009), pp.23-28

謝辞

本論文を執筆するにあたり多大なご指導，ご鞭撻を頂きました田川俊夫准教授に心から感謝申し上げます。学会発表など貴重な経験をさせて頂き，CFD に関する知見を広げることができました。

そして，お忙しい中，本論文の副査を引き受けて頂いた稲澤歩准教授ならびに金崎雅博准教授にも厚く御礼申し上げます。

バグ取りや数値計算のことなどいつも助けて頂いた先輩方にも深く感謝いたします。また，院試や研究などをともに経験し，助け合った菊地真司氏，藤木俊輔氏ならびに優秀な後輩たちに感謝致します。皆さんのおかげで有意義な研究生生活を過ごすことができました。

最後に，卒業までの長い学生生活を支援し，見守っていただいた両親，兄弟に心から感謝し，お礼申し上げます。